



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

*Διπλωματική εργασία*

*Προσομοίωση ροής υγρού υμένα πάνω σε κεκλιμένο τοίχωμα,  
κυματοειδώς διαμορφωμένο, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων*

υπό

**ΕΥΘΥΜΙΑΔΗ ΙΩΑΝΝΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

*Βόλος, Ιούλιος 2005*



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4547/1  
Ημερ. Εισ.: 20-07-2005  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ  
2005  
ΕΥΘ

Copyright © Ευθυμιάδης Ι. Παναγιώτης, 2005

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

**Πρώτος Εξεταστής**      **Μποντόζογλου Βασίλειος**  
Καθηγητής  
Φαινομένων Μεταφοράς και Συσκευών Φυσικών  
Διεργασιών  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

**Δεύτερος Εξεταστής**      **Πελεκάσης Νικόλαος**  
Επίκουρος Καθηγητής  
Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

**Τρίτος Εξεταστής**      **Βλαχογιάννης Μιχαήλ**  
Διδάσκων 407/80  
Προσωπικό εργαστηρίου Φυσικών & Χημικών  
Διεργασιών  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## **Ευχαριστίες**

Με την ευκαιρία της παρούσας διπλωματικής θα ήθελα να ευχαριστήσω το προσωπικό του τμήματος των Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας για την καθοδήγησή τους σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Κυρίαρχο στοιχείο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι η συνεργασία μου με τον Καθηγητή του τμήματος κ. Βασίλειο Μποντόζογλου. Θέλω να τον ευχαριστήσω θερμά για την εξαιρετική διδασκαλία του στα προπτυχιακά του μαθήματα και για την συνεχή υποστήριξή του. Ευχαριστίες οφείλω και στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κ. Νικόλαο Πελεκάση και κ. Βλαχογιάννη Μιχαήλ για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του εργαστηρίου Φυσικών & Χημικών Διεργασιών και ιδιαίτερα την υποψήφια διδάκτωρα Σερίφη Κατερίνα για τις χρησιμές συμβουλές της.

Τέλος, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου Ιωάννη και Σουλτάνα που με στηρίζουν όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην οικογένειά μου.

***Παναγιώτης Ευθυμιάδης***

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε η ροή ενός υγρού υμένα πάνω σε κυματοειδές τοίχωμα. Το ενδιαφέρον για τη ροή υγρού υμένα υπαγορεύεται τόσο από την πληθώρα βιομηχανικών εφαρμογών όσο και από τη θεμελιώδη σημασία της στην κατανόηση βασικών υδροδυναμικών μεταπτώσεων. Ειδικότερα, η κατάλληλη επιλογή των χαρακτηριστικών του κυματοειδούς τοιχώματος αναμένεται να οδηγήσει στην εντατικοποίηση των φαινομένων μεταφοράς θερμότητας ή/και μάζας διαμέσου του υμένα.

Η μελέτη της ροής έγινε υπολογιστικά, με αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes για Νευτώνειο υγρό. Κατάλληλες συνοριακές συνθήκες επιλέχτηκαν για την περιγραφή της εισόδου και της εξόδου του υγρού από το υπολογιστικό πεδίο, έτσι ώστε η προσομοίωση να προσεγγίζει κατά το δυνατόν το φυσικό πείραμα.. Κύρια υπολογιστική συνεισφορά της παρούσας εργασίας είναι η εισαγωγή των συνθηκών του περιοδικού τοιχώματος. Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος κατά Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων. Οι λύσεις που υπολογίστηκαν είναι μόνιμες, δηλαδή δεν μεταβάλλονται χρονικά.

Διερευνήθηκαν δύο βασικά χαρακτηριστικά της ροής υγρού υμένα πάνω σε περιοδικό τοίχωμα. Η εμφάνιση δινών αποκόλλησης στις κοιλότητες του τοιχώματος και η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας της ροής. Τα χαρακτηριστικά αυτά εξετάστηκαν συστηματικά ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής και του βάθους του κυματισμού του τοιχώματος.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1.....	1
1.1. Εισαγωγή.....	1
1.2. Εφαρμογές.....	3
Κεφάλαιο 2.....	5
2.1. Επίπεδο τοίχωμα - πρόβλημα ροής.....	5
2.2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	10
Κεφάλαιο 3.....	14
3.1. Περιγραφή της ροής.....	14
Κεφάλαιο 4.....	18
4.1. Υπολογιστικό πλέγμα.....	18
4.2. Προσομοίωση ημιτονοειδούς τοιχώματος.....	20
4.3. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.....	23
4.4. Τα σταθμισμένα υπόλοιπα των κύριων εξισώσεων.....	28
4.5. Χωρικοί και χρονικοί αλγόριθμοι ολοκλήρωσης.....	29
Κεφάλαιο 5.....	33
5.1. Εισαγωγή.....	33
5.2. Περιγραφή της ροής.....	34
5.2.1. Αριθμός Reynolds 20.....	35
5.2.2. Αριθμός Reynolds 40.....	39
5.2.3. Αριθμός Reynolds 100.....	41
5.2.4. Αριθμός Reynolds 150.....	44
5.3. Ανάλυση της ροής.....	47
5.3.1. Χαρακτηριστικά των δινών.....	47
5.3.2. Δίνη Α.....	48
5.3.3. Δίνη Β.....	58
5.4. Χαρακτηριστικά ελεύθερης επιφάνειας.....	64
Κεφάλαιο 6.....	78
6.1. Συμπεράσματα.....	78
6.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	79
Βιβλιογραφία.....	81
Παράρτημα 1.....	82
Παράρτημα 2.....	132

# Κεφάλαιο 1

Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται στον ορισμό του προβλήματος καθώς και στο έναυσμα, στο σκοπό και στις εφαρμογές της μελέτης. Το πρόβλημα το οποίο εξετάστηκε είναι η ροή υγρού υμένα πάνω σε περιοδική επιφάνεια. Ο λόγος που επιλέχτηκε το συγκεκριμένο θέμα είναι το θεμελιώδες ενδιαφέρον του, σε συνδυασμό με τις πολλές και σημαντικές εφαρμογές του, κυρίως στο βιομηχανικό περιβάλλον.

## 1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

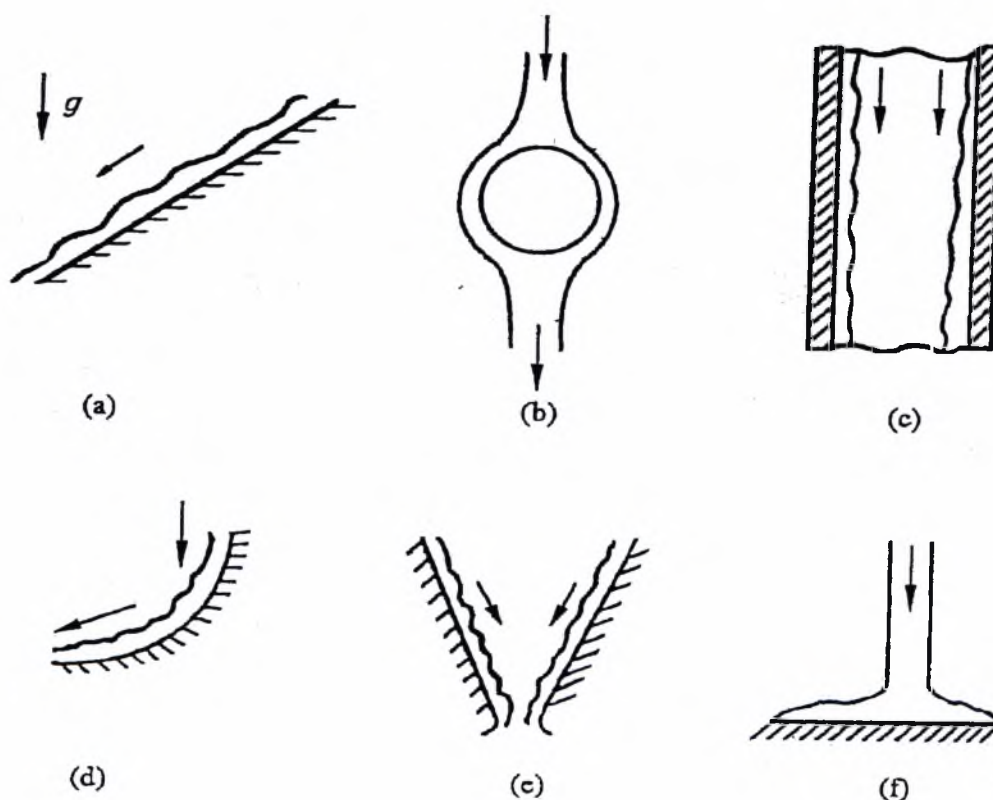
Η μελέτη ασχολείται με τη ροή υγρών υμένων πάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια και πιο συγκεκριμένα με την επίδραση στη δυναμική της ροής μιας επιφάνειας περιοδικά διαμορφωμένης.

Ένα υγρό που ρέει υπό την επίδραση της βαρύτητας πάνω σε μία επιφάνεια, με ένα τουλάχιστον ελεύθερο σύνορο ορίζεται ως ροή λεπτού υμένα. Οι υμένες υγρού έχουν πολλές ιδιαιτερότητες και για το λόγο αυτό αντιμετωπίζονται ως ξεχωριστή κατηγορία ροών. Πρώτα από όλα πρέπει να σημειωθεί το μικρό πάχος των υμένων (0,1-1mm) σε σχέση με τα χαρακτηριστικά μεγέθη και τη γεωμετρία της ροής που συναντώνται συνήθως στη φύση. Επίσης, εφόσον ο αριθμός Reynolds καλύπτει μεγάλο εύρος τιμών (1-1000), η επίδραση των δυνάμεων ιξώδους παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Από την άλλη μεριά, η ύπαρξη της ελεύθερης επιφάνειας με ύψος συγκρίσιμο με αυτό του πάχους του υμένα σημαίνει ότι η επίδραση των διαταραχών της ελεύθερης επιφάνειας στη ροή του ρευστού είναι εξίσου σημαντική. Για τους λόγους αυτούς, η μαθηματική περιγραφή της ροής ενός υγρού υμένα, ακόμα και στην πιο απλή της κατάσταση, είναι αρκετά περίπλοκη. Ωστόσο, μία σημαντική απλοποίηση είναι δυνατή για ροές με μεγάλου



μήκους κύματος διαταραχές, όπου είναι κατάλληλη η θεώρηση του απλοποιημένου οριακού στρώματος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται ορισμένες τυπικές γεωμετρίες και τύποι ροής υγρού υμένα. Οι γεωμετρίες αυτές συναντώνται συχνά σε τμήματα βιομηχανικού εξοπλισμού, όπως στους εναλλάκτες θερμότητας, στις στήλες απόσταξης, στους διαχωριστές υγρού-αερίου και στους εξατμιστήρες. Η ροή ενός υγρού υμένα υπό την επίδραση της βαρύτητας πάνω σε ένα επικλινές τοίχωμα ή στην εξωτερική επιφάνεια ενός κάθετου σωλήνα έχει μελετηθεί συστηματικά στη βιβλιογραφία. Η ροή υγρού υμένα πάνω σε κινούμενα, περιστρεφόμενα και δονούμενα μέρη είναι τα πιο περίπλοκα παραδείγματα.



Σχήμα 1.1. Γεωμετρίες υγρού υμένα: (a) Ροή υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση της βαρύτητας, (b) Ροή υμένα εξωτερικά ενός κάθετου στη ροή σωλήνα, (c) Ροή εσωτερικά ενός σωλήνα, (d) Ροή πάνω σε μία καμπύλη επιφάνεια, (e) Ροή κατά μήκος της εσωτερικής επιφάνειας ενός κώνου, (f) Ψεκασμός ρευστού πάνω σε ένα τοίχωμα.

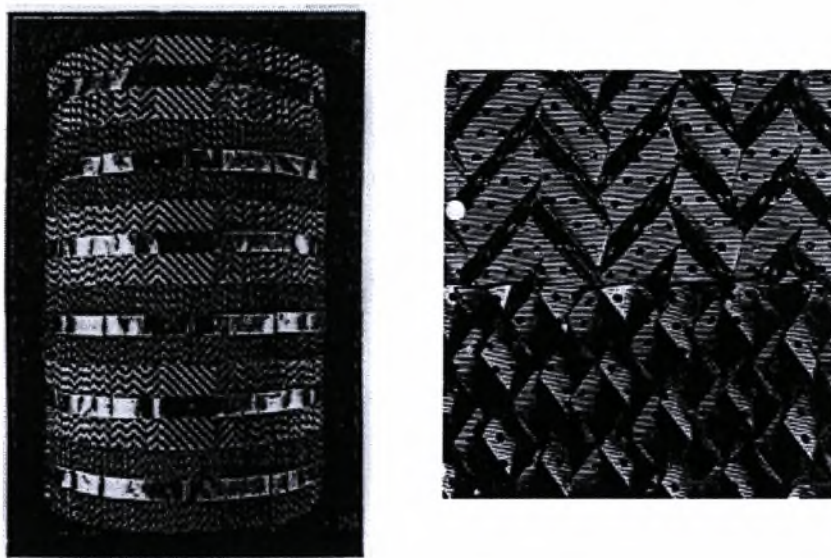
Σ' αυτήν την εργασία μελετάται υπολογιστικά με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων η κίνηση υγρού υμένα υπό την επίδραση της βαρύτητας πάνω σε κεκλιμένο, περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα.

Πιο συγκεκριμένα το πεδίο ροής αποτελείται από τρία στάδια. Το πρώτο, στο οποίο το ρευστό ρέει πάνω σε μία λεία επιφάνεια, το δεύτερο όπου η επιφάνεια εμφανίζει ημιτονοειδές τοίχωμα και το τρίτο στάδιο ή στάδιο εκροής του ρευστού που είναι πάλι μία λεία επιφάνεια. Το πεδίο όπου μας ενδιαφέρει η ροή είναι το δεύτερο στάδιο του κυματοειδούς τοιχώματος. Θεωρούμε ότι το ρευστό μας εισέρχεται κινούμενο με την παραβολική κατανομή ταχύτητας κατά Nusselt και καθώς συναντά το κυματοειδές τοίχωμα και αναπτύσσεται η ροή, το ρευστό διαταράσσεται προκαλώντας κυματώσεις στην ελεύθερη επιφάνειά του και δίνες στο εσωτερικό των κοιλοτήτων του τοιχώματος.

## 1.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ροές λεπτού υγρού υμένα συναντώνται συχνά σε πολλούς τομείς της σύγχρονης ζωής, όπως στη παραγωγή μικροηλεκτρονικών συσκευών (MEMS), στους εναλλάκτες θερμότητας, στις συσκευές μεταφοράς μάζας, στους ξηραντήρες, στους εξατμιστήρες και στα κλιματιστικά. Συγχρόνως, χρησιμοποιούνται στην τεχνολογία κατασκευής επικάλυψης στις φωτογραφίες, ενώ αποτελούν και το κύριο φαινόμενο που συναντάται στη βιομηχανική αλλά και στην οικιακή βαφή. Επίσης, η συνδυασμένη ροή ενός υγρού υμένα και μιας αέριας φάσης (διφασική ροή) συχνά συναντάται από τους μηχανικούς. Η σχετική κίνηση των δύο φάσεων προκαλεί τη δημιουργία επιπρόσθετων διατμητικών και ορθών τάσεων στη διεπιφάνεια και έτσι επηρεάζεται η μορφή- δομή της ροής και της διεπιφάνειας.

Πολλές φορές όμως στις συσκευές μεταφοράς μάζας και θερμότητας χρησιμοποιούνται μη επίπεδα τοιχώματα με σκοπό την αύξηση των ρυθμών μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Τυπικά παραδείγματα αποτελούν οι μη- επίπεδες επιφάνειες εσωτερικά στους συμπυκνωτές και στους εξατμιστήρες και το δομημένο πληρωτικό υλικό στις στήλες απορρόφησης και στους δίσκους απόσταξης (Bontozoglou, 2000). Στο Σχήμα 1.2 φαίνεται η χρήση του ημιτονοειδούς τοιχώματος σε μια συσκευή μεταφοράς μάζας.



Σχήμα 1.2. Αριστερά είναι μία τυπική μορφή συσκευής μεταφοράς μάζας και δεξιά σε μεγέθυνση η μορφή των τοιχωμάτων της συσκευής (στο κάτω μέρος διακρίνεται το ημιτονοειδές τοίχωμα).

Επιπλέον εφαρμογές που περιλαμβάνουν τη ροή ρευστού σε ημιτονοειδές τοίχωμα επεκτείνονται και σε άλλους τομείς, όπως είναι η μεταλλουργία και γενικότερα η τεχνολογία των υλικών. Η ροή μιας επίστρωσης υγρού μετάλλου πάνω σε μία ημιτονοειδή επιφάνεια (επικαλύψεις υλικών) αποτελεί παράδειγμα ροής υγρού υμένα με υψηλό ιξώδες. Το ίδιο συμβαίνει και με άλλα υλικά, όπως είναι τα πλαστικά και τα σύνθετα υλικά.

Έτσι, διαπιστώνουμε από το πλήθος των εφαρμογών και των ερευνητικών δραστηριοτήτων ότι η ροή ενός υγρού υμένα αποτελεί ένα πεδίο με ποικίλα ερευνητικά άλλα και πρακτικά ενδιαφέροντα.

## Κεφάλαιο

## 2

**2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ**

Σ' αυτό το κεφάλαιο, γίνεται μία ανασκόπηση στην κλασσική θεωρία ροής υγρού υμένα, διατυπώνονται οι αντίστοιχες σχέσεις κατά Nusselt με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, και παρουσιάζονται οι σύγχρονες θεωρίες και μελέτες για το πρόβλημα.

**2.1. ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΙΧΩΜΑ- ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΟΗΣ**

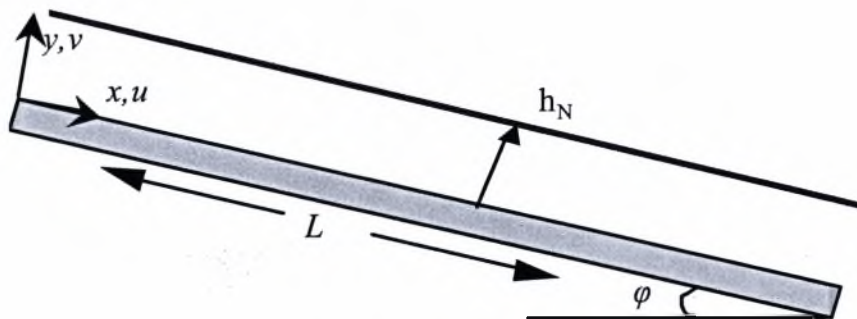
Έχουν γίνει πολλές μελέτες τις προηγούμενες δεκαετίες για τη ροή υγρού υμένα. Μία από τις πρώτες μελέτες και πολύ σημαντική ανήκει στο Nusselt [Nusselt, 1916], ο οποίος αναφέρθηκε στη ροή υμένα σταθερού πάχους σε κάθετο τοίχωμα που κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας. Ο Nusselt έβγαλε κάποια αποτελέσματα ως προς τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής ενός υμένα σταθερού πάχους. Έτσι προέκυψαν οι επόμενες σχέσεις ως προς το πάχος του υμένα ( $h_N$ ) και τη μέση ταχύτητα του υμένα ( $U$ ) σε συνάρτηση με την ογκομετρική παροχή ( $Q$ ):

$$h_N = \left[ \frac{3\nu}{g} \right]^{1/3} Q^{1/3} = \left[ \frac{3\nu^2}{g} \right]^{1/3} Re^{1/3} \quad (2.1.1)$$

$$U = \left[ \frac{g}{3\nu} \right]^{1/3} Q^{2/3} = \left[ \frac{\nu g}{3} \right]^{1/3} Re^{2/3} \quad (2.1.2)$$

όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες και  $Re$  ο αριθμός Reynolds ( $Re = U \cdot h_N / \nu$ ). Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για σταθερού πάχους υμένα. Ωστόσο είναι γνωστό ότι κύματα σχηματίζονται στην ελεύθερη επιφάνεια ακόμα και σε σχετικά 'ομαλές' ροές.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τις παραπάνω σχέσεις, καθώς και άλλες που αφορούν την κατανομή ταχύτητας, για την γενικότερη περίπτωση ενός κεκλιμένου επιπέδου. Θεωρούμε διδιάστατη ροή χαρακτηριστικού μήκους  $L$  (σχ.2), η ταχύτητα στη  $x$ -κατεύθυνση δεν αλλάζει με τη μεταβολή του  $x$  και τέλος η πυκνότητα και το ιξώδες παραμένουν σταθερά.



Σχήμα 2.1. Ροή υγρού υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο

Λαμβάνοντας ένα στοιχειώδη όγκο, η απλοποιημένη μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes γράφεται ως:

$$\left[ (dyu)(\rho u) \Big|_x - (dyu)(\rho u) \Big|_{x+L} \right] + \left[ L\tau_{yx} \Big|_y - L\tau_{yx} \Big|_{y+dy} \right] + Ly\rho g \sin \varphi = 0 \quad (2.1.3)$$

Θεωρώντας μόνιμες συνθήκες ροής η εξίσωση (2.1.3) γίνεται:

$$\frac{d(\tau_{yx})}{dy} + \rho g \sin \varphi = 0 \quad (2.1.4)$$

όπου:  $\tau_{yx} = -\mu \frac{du_x}{dy}$



Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow u(0)=0 \\ y=h_N \Rightarrow \tau_{yx}=0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2.1.4) και (2.1.5) προκύπτει:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -\rho \cdot g \cdot \sin \phi \rightarrow \tau_{yx} = -\rho \cdot g \cdot \sin \phi \cdot y + c$$

$$\text{Για: } y=h_N \rightarrow \tau_{yx}=0 \text{ και } -\rho \cdot g \cdot \sin \phi \cdot h_N + c = 0$$

$$\text{Αρα: } \tau_{yx} = -\rho \cdot g \cdot \sin \phi \cdot y + \rho \cdot g \cdot \sin \phi \cdot h_N = \rho \cdot g \cdot \sin \phi \cdot (h_N - y)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \cdot g \cdot \sin \phi \cdot (h_N - y) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g \cdot \sin \phi}{\nu} \cdot (h_N - y)$$

$$u = \frac{g \cdot \sin \phi}{\nu} \cdot \left( h_N \cdot y - \frac{y^2}{2} \right)$$

Η τελευταία εξίσωση με την κατάλληλη συνοριακή συνθήκη δίνει:

$$\begin{cases} u = \frac{g \cdot \sin \phi}{\nu} \cdot \left( h_N \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) \\ \text{Για } y=0: u=0 \rightarrow c=0 \end{cases} \longrightarrow u = \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^2}{\nu} \cdot \left( \frac{y}{h_N} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{h_N^2} \right) \quad (2.1.6)$$

Η εξίσωση (2.1.6) γράφεται και με τη μορφή:

$$u = \left( \frac{\rho g h_N^2 \sin \phi}{2\mu} \right) y (2h_N - y) \quad (2.1.7)$$

Για να βρούμε τη μέση ταχύτητα  $U$  ολοκληρώνουμε τη σχέση (2.1.6) και διαιρούμε με το πάχος  $h_N$ :

$$\begin{aligned} \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^2}{\nu} \cdot \int_0^L \left( \frac{y}{h_N} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{h_N^2} \right) dy &= \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^2}{\nu} \cdot \left[ \frac{y^2}{2 \cdot h_N} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3 \cdot h_N^2} \right]_0^{h_N} = \\ &= \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^2}{\nu} \cdot \left[ \frac{h_N}{2} - \frac{h_N}{6} \right] = \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^3}{3 \cdot \nu} \end{aligned}$$

Διαιρώντας με το πάχος Nusselt:

$$U = \frac{\frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^3}{3 \cdot \nu}}{h_N} = \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^2}{3 \cdot \nu} \quad (2.1.8)$$

Η ογκομετρική παροχή είναι το γινόμενο της μέσης ταχύτητας επί το πάχος Nusselt:

$$Q = U \cdot h_N = \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^3}{3 \cdot \nu} \quad (2.1.9)$$

Το πάχος του υμένα,  $h_N$ , συνδέεται με το ρυθμό ογκομετρικής παροχής,  $Q$ , μέσω της σχέσης (2.1.10):

$$Q = U \cdot h_N = \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^3}{3 \cdot \nu}$$

$$Re = \frac{Q}{\nu} = \frac{g \cdot \sin \phi \cdot h_N^3}{3 \cdot \nu^2}$$

$$h_N^3 = \frac{3 \cdot \nu \cdot Q}{g \cdot \sin \phi} \rightarrow h_N = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \nu \cdot Q}{g \cdot \sin \phi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \nu^2 \cdot Re}{g \cdot \sin \phi}}$$

$$h_N = \sqrt[3]{\frac{3Q\mu}{\rho g \sin \phi}} \quad (2.1.10)$$

Για τη μέση ταχύτητα ισχύει:

$$U = \frac{Q}{h_N} = \frac{Q}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \nu \cdot Q}{g \cdot \sin \phi}}} = \sqrt[3]{\frac{g \cdot \sin \phi}{3 \cdot \nu}} \cdot Q^{\frac{2}{3}}$$

$$U = \sqrt[3]{\frac{g \cdot \sin \phi \cdot \nu}{3}} \cdot \text{Re}^{\frac{2}{3}}$$

Οι αριθμοί Reynolds, Kapitza και Weber γράφονται ως:

$$\text{Re} = \frac{U \cdot h_N}{\nu} = \frac{Q}{\nu} \quad (2.1.11)$$

$$\text{We} = \frac{\sigma}{(\rho \cdot U^2 \cdot h_N)} \quad (2.1.12)$$

$$\text{Ka} = \frac{\gamma}{(\rho \cdot \nu^{\frac{4}{3}} \cdot g^{\frac{1}{3}})} \quad (2.1.13)$$

όπου  $U$  είναι η μέση ταχύτητα του υγρού υμένα,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και  $\sigma$  η επιφανειακή τάση.

Ωστόσο, όλα τα παραπάνω αναφέρονται στην περίπτωση ροής υγρού υμένα σε μόνιμη κατάσταση. Η μαθηματική ανάλυση του προβλήματος της ροής υγρού υμένα με επιφανειακά κύματα είναι μη- γραμμική και αρκετά πολύπλοκη εφόσον το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας είναι άγνωστο και πρέπει να συνυπολογιστεί με τις υπόλοιπες άγνωστες παραμέτρους. Η δυναμική της ροής του υγρού υμένα κυριαρχείται από



(μοναχικά) κύματα στην ελεύθερη επιφάνεια και πιθανόν δίνες εσωτερικά της ροής. Αυτές οι διαταραχές της επιφάνειας του υμένα και της ροής εσωτερικά υπολογίζονται με τη επίλυση της εξίσωσης Navier-Stokes με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ο αριθμητικός κώδικας δε χρησιμοποιείται μόνο για τη μελέτη των αλληλεπιδράσεων των μεμονωμένων κυμάτων αλλά και για τον εντοπισμό δινών στην περίπτωση ενός μη επίπεδου ημιτονοειδούς τοιχώματος.

## 2.2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Μία από τις πρώτες δημοσιεύσεις για κυματοειδές τοίχωμα έγινε από τον C-Y Wang (1981), ο οποίος ασχολήθηκε με τη ροή υγρού υμένα σε κεκλιμένο τοίχωμα και μικρούς αριθμούς Reynolds ( $Re \sim 5$ ). Ο Wang εξέτασε κυρίως τη μορφολογία της ελεύθερης επιφάνειας και διαπίστωσε ότι το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας αυξάνει με την μείωση του μήκους κύματος του τοιχώματος ή με τη μείωση της παραμέτρου  $D$  (όπου η μείωση του  $D$  αντιστοιχεί σε αύξηση της γωνίας του κεκλιμένου τοιχώματος ή σε μικρότερη επιφανειακή τάση). Επίσης, διαπίστωσε ότι η θέση της ελεύθερης επιφάνειας βρίσκεται σε φάση με το τοίχωμα όταν το μήκος κύματος είναι πολύ μεγάλο (τείνει στο άπειρο) ή πολύ μικρό (είναι μηδέν) ενώ το μέγιστο όταν η επιφανειακή τάση είναι πολύ μεγάλη. Επιπλέον, τα επιφανειακά κύματα που σχηματίζονται, οφείλονται μόνο στις πτυχώσεις του τοιχώματος, και είναι ευσταθή. Τέλος, η ροή γίνεται τυρβώδης για αριθμούς Reynolds πάνω από 250 και εικάζει ότι σε υψηλούς αριθμούς Reynolds οι πτυχώσεις μπορούν να προκαλέσουν κύματα ασταθή, ίδιου μήκους κύματος.

Αργότερα ο Bontozoglou (2000) ασχολήθηκε με την ανάλυση της ροής υγρού υμένα πάνω σε ημιτονοειδώς διαμορφωμένο τοίχωμα. Η προσέγγιση του προβλήματος έγινε αριθμητικά, με μία φασματική χωρική διακριτοποίηση, που βασίστηκε στις σχέσεις Fourier κατά μήκος της ροής και στα πολυώνυμα Chebychev στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στη ροή. Το πρόβλημα μετασχηματίστηκε με τη χρήση συντεταγμένων που συμπίπτουν με το σύνορο της ροής και οι μόνιμες συνθήκες επιτεύχθηκαν για μεγάλου μήκους κύματος διαταραχές. Εξετάστηκε ο συντονισμός μεταξύ του τοιχώματος και της

ελεύθερης επιφάνειας για διαταραχές του τοιχώματος με μήκος κύματος 0,002 m, που σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία (Bontozoglou & Papapolymereou, 1997) οδηγούν στην ισχυρότερη αλληλεπίδραση. Υπολογίστηκαν οι μη- γραμμικές κυματώσεις συντονισμού και η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας προέκυψε πολύ διαταραγμένη κοντά στην περιοχή συντονισμού ενώ έδειχνε να αλλάζει φάση καθώς κινούμαστε από τις υποκρίσιμες ροές στις υπερκρίσιμες. Ο διαχωρισμός του ρευστού στο εσωτερικό της κοιλότητας του τοιχώματος, που συνοδεύεται από το σχηματισμό δίνης, υπολογίστηκε για αρκετά μεγάλες διαταραχές του τοιχώματος. Ο διαχωρισμός φαίνεται να συμβαίνει ευκολότερα και με μεγαλύτερο εύρος στις υποκρίσιμες ροές. Το ελάχιστο βάθος του τοιχώματος στο οποίο συμβαίνει η αποκόλληση της ροής μειώνεται με τον αριθμό Reynolds, αλλά διατηρεί μεγαλύτερες τιμές σε συνθήκες κοντά στο συντονισμό. Η κατανομή της διατμητικής τάσης κατά μήκους του τοιχώματος διαφέρει σημαντικά σε σχέση με τη ροή σε επίπεδο τοίχωμα, φαινόμενο το οποίο περιπλέκει τις διεργασίες μεταφοράς από το τοίχωμα στο ρευστό. Η χωρική κατανομή του διανύσματος της ταχύτητας που είναι κάθετη στην ελεύθερη επιφάνεια υπολογίστηκε μαζί με την ταυτοποίηση των περιοχών εισροής και εκροής.

Οι Liu και Gollub (1994) έκαναν μία συστηματική μελέτη των ταχυτήτων, της εξέλιξης και της αλληλεπίδρασης των μοναχικών κυμάτων για ροές υγρού υμένα σε συνθήκες  $15 < Re < 50$  και  $\phi = 4-10^\circ$ . Τα μοναχικά κύματα μπορούν να παραχθούν με πολλούς τρόπους: α) με διαταραχές μικρής συχνότητας, όπου η μη- γραμμική αλληλεπίδραση των εξαναγκασμένων συχνοτήτων και οι αρμονικές τους οδηγούν στη γρήγορη ανάπτυξη τοπικών παλμών, β) επιτρέποντας μεγάλης συχνότητας περιοδικά κύματα να εξελιχθούν, μέσα από δευτερογενείς αστάθειες με επακόλουθες αλληλεπιδράσεις και συνενώσεις, σε μοναχικά κύματα, γ) εισάγοντας τεχνητά ποικιλία μηκών κύματος μέσω της διαταραχής εισόδου και δ) από τη μη- γραμμική εξέλιξη των φυσικών κυμάτων. Απέδειξαν ποσοτικά τον τρόπο με τον οποίο η ταχύτητα των μοναχικών κυμάτων εξαρτάται από τη συχνότητα της διαταραχής και το ύψος των κυμάτων. Η ισχυρή εξάρτηση της ταχύτητας των μοναχικών κυμάτων από το ύψος είναι εξαιρετικά σημαντική αφού δικαιολογεί τις αλληλεπιδράσεις των μοναχικών κυμάτων. Οι αλληλεπιδράσεις είναι ισχυρά ανελαστικές στον τρόπο με τον οποίο δύο κύματα

συγχωνεύονται. Ένα μεγάλο μοναχικό κύμα προσπερνά και απορροφά τα έμπροσθεν αργότερα, αφήνοντας μία μακριά επίπεδη διεπιφάνεια πίσω τους.

Οι Bontozoglou και Vlachogiannis (2002) χρησιμοποίησαν μία μέθοδο φθορισμού για να ερευνήσουν τη δομή της ροής υγρού υμένα κατά μήκος ενός διαταραγμένου τοιχώματος. Πιο συγκεκριμένα όσο αναφορά το πείραμα, το τοίχωμα ήταν περιοδικό με ορθογωνικές αυλακώσεις. Το αποτέλεσμα που προέκυψε ήταν διαφορετικοί τύποι ροής με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Το καθεστώς της μόνιμης ροής, το οποίο αναδεικνύει τη στατικά παραμορφωμένη ελεύθερη επιφάνεια με ίδιο μήκος κύματος με το τοίχωμα, κυριαρχεί στα πρώτα μήκη κύματος του τοιχώματος και επηρεάζει τις μη- μόνιμες δυναμικές συνθήκες στο χείλος του καναλιού. Από την άλλη, σε υπέρθεση ως προς τη βασική ροή δημιουργούνται διαταραχές που ταξιδεύουν στο κανάλι αποσταθεροποιούν τη ροή και αργότερα εξελίσσονται σε μοναχικά κύματα. Στην ανάντη μεριά του καναλιού, οι διαταραχές που ταξιδεύουν, κυριαρχούνται από τη στατικά παραμορφωμένη ελεύθερη επιφάνεια, και εμφανίζονται ως παραμορφώσεις της βασικής ροής. Κατάντη της ροής εμφανίζονται τα πλήρως ανεπτυγμένα κύματα. Σε μικρούς  $Re$  τα κύματα αυτά εμφανίζουν κάποια συχνότητα, επιδεικνύοντας ότι η χωρική επιβολή του περιοδικού τοιχώματος οδηγεί σε μία φυσική διαδικασία επιλογής. Σε μεγαλύτερους αριθμούς  $Re$  αυτές οι διαταραχές εξελίσσονται σε πεταλοειδή κύματα με υψηλά κεκλιμένα πρόσωπα. Σε υψηλούς  $Re$  η δομή της ροής είναι πλέον τρισδιάστατη και χαρακτηρίζεται από τη σταδιακή μείωση του πάχους του υμένα και από την υποχώρηση των μοναχικών κυμάτων.

Οι Aksel, Scholle και Wierschem (2003) έκαναν πειράματα για τη ροή υγρού υμένα πάνω σε κυματοειδές τοίχωμα, για μικρούς αριθμούς Reynolds. Η ανάλυση επικεντρώθηκε περισσότερο στην εμφάνιση και στα χαρακτηριστικά των δινών στη δομή της ροής. Παρατήρησαν ότι υπάρχει μία ελάχιστη κυματότητα του τοιχώματος κάτω από την οποία οι δίνες δεν μπορούν να σχηματιστούν. Για αιχμηρά τοίχωματα, δημιουργούνται δίνες πάνω από ένα κρίσιμο πάχος υμένα. Το κρίσιμο αυτό πάχος υμένα αυξάνει με τη γωνία του τοιχώματος και με το αντίστροφο της επιφανειακής τάσης. Για πολύ αιχμηρά τοίχωματα το κρίσιμο αυτό πάχος υμένα γίνεται μηδέν. Τα πειράματα που έκαναν ήταν για ένα εύρος τιμών αριθμού Reynolds από  $3 \cdot 10^{-5}$  έως 1,2. Για αυτές τις τάξεις μεγέθους παρατήρησαν ότι ο αριθμός Reynolds δεν είναι υπεύθυνος για την

ύπαρξη των δινών. Τέλος διατύπωσαν ότι αυξάνοντας την αιχμηρότητα του τοιχώματος εμφανίζεται και μία δεύτερη δίνη, με τα ίδια χαρακτηριστικά με την πρώτη, πάνω από ένα κρίσιμο πάχος υμένα. Το μέγεθος των δινών αυξάνεται πάνω από το κρίσιμο πάχος του υμένα και τείνει ασυμπτωτικά σε μια πεπερασμένη τιμή για λεπτούς υμένες, ανεξαρτήτως της κλίσης του τοιχώματος και της επιφανειακής τάσης.

Οι Aksel και Wierschem (2004) εξέτασαν την επιρροή της αδράνειας στα χαρακτηριστικά των δινών κατά τη ροή πάνω σε κυματοειδή τοιχώματα. Παρατήρησαν ότι για στρωτή ροή, οι δίνες είναι κεκλιμένες ως προς τον άξονα συμμετρίας της κοιλότητας και το μέγεθός τους αυξάνεται ως συνάρτηση του αριθμού Froude. Σε μικρούς αριθμούς Reynolds, το κρίσιμο πάχος του υμένα για το σχηματισμό δινών εξαρτάται από την αιχμηρότητα του τοιχώματος ( $2\pi B/L$ ), την κλίση του τοιχώματος και την επιφανειακή τάση αλλά όχι από τον αριθμό Reynolds. Για πολύ λεπτούς υμένες το μέγεθος των δινών τείνει σε μια πεπερασμένη τιμή, ανεξάρτητα από την επιφανειακή τάση και την κλίση του τοιχώματος. Επιπλέον, αυξάνοντας την τιμή της αδράνειας οι δίνες μετατρέπονται σε ασταθείς. Αυτή η δυναμική της ροής γίνεται σημαντική στην κατάντη πλευρά της δίνης. Το μέγεθος της δίνης προέκυψε ότι μεγαλώνει με αύξηση της αδράνειας. Αυξάνοντας την αδράνεια οι δίνες χάνουν τη συμμετρία τους, ενώ παράλληλα, αυξάνοντας το πάχος του υμένα οι δίνες μεγαλώνουν από την κατάντη πλευρά της κοιλότητας προς την ανάντη μεριά της.

## Κεφάλαιο

## 3

## 3.1. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

Θεωρούμε μία διδιάστατη μορφή ροής με ένα υγρό υμένα που κινείται σε κεκλιμένη επιφάνεια, υπό την επίδραση του βαρύτητας. Ο μέσος ρυθμός ογκομετρικής παροχής ανά μονάδα μήκους και ο αριθμός Reynolds ορίζονται από τη σχέση:

$$Re = \frac{Q}{\nu} \quad (3.1.1)$$

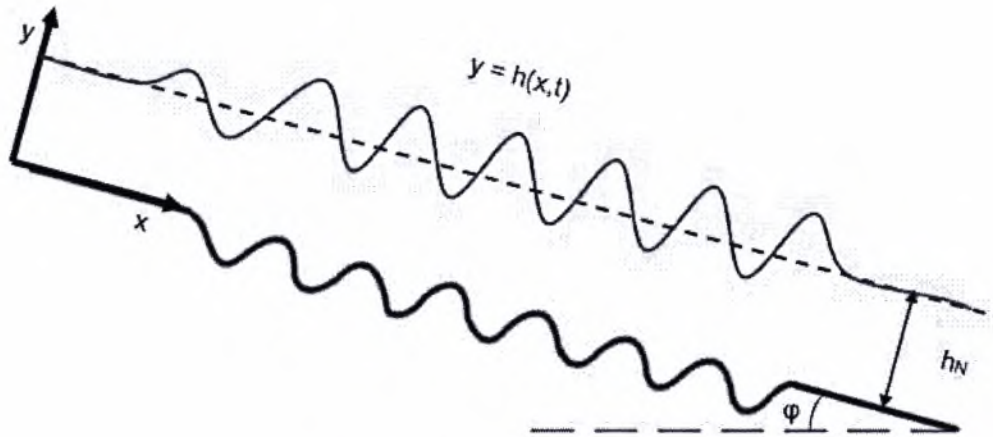
όπου  $\nu$  είναι το κινηματικό ιξώδες  $\nu = \mu/\rho$ . Η κατεύθυνση  $x$  είναι στην μέση διεύθυνση της ροής και η  $y$  κάθετη στη ροή. Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας και το μέγεθος της στιγμιαίας ογκομετρικής παροχής γενικά ποικίλει ως προς τη θέση  $x$  και το χρόνο  $t$  και περιγράφονται από τις συναρτήσεις  $h(x,t)$  και  $q(x,t)$  αντίστοιχα. Για σταθερού πάχους υμένα η θέση της ελεύθερης επιφάνειας και το προφίλ της ταχύτητας δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις, γνωστές ως σχέσεις Nusselt, που αποδείχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$h_N = \left( \frac{3 \cdot \nu^2 \cdot Re}{g \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.1.2)$$

$$u(x, y, t) = \frac{g \cdot \sin \varphi \cdot h_N^2}{\nu} \cdot \left( \frac{y}{h_N} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h_N^2} \right) \quad (3.1.3)$$



όπου η μέση ταχύτητα Nusselt και η ογκομετρική παροχή δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:  $U = g \sin \varphi h_N^2 / 3\nu$  και  $Q = U h_N$ .



Σχήμα 3.1. Σχεδιάγραμμα ροής

Η πλήρης περιγραφή της ροής επιτυγχάνεται με τη ικανοποίηση της εξίσωσης της συνέχειας και της εξίσωσης Navier-Stokes μαζί με τις συνοριακές συνθήκες. Χρησιμοποιούμε τη μέση ταχύτητα Nusselt,  $U$ , ως χαρακτηριστική ταχύτητα και το πάχος του υμένα κατά Nusselt,  $h_N$ , ως χαρακτηριστικό μήκος και αδιαστατοποιούμε το χρόνο και την πίεση αντίστοιχα ως προς τις παραμέτρους  $h_N / U$  και  $\rho U^2$ . Έτσι, οι εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes στην αδιάστατή τους μορφή γράφονται ως:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{\text{Fr}} \underline{g} \quad (3.1.5)$$

όπου  $\underline{u} = (u, v)$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού με  $u$  και  $v$  τα αντίστοιχα διανύσματα στην  $x$  και  $y$  κατεύθυνση αντίστοιχα,  $p$  η αδιαστατοποιημένη πίεση και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας. Ο αριθμός Froude ( $\text{Fr}$ ) ορίζεται από τη σχέση:

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{g \cdot h_N}} \quad (3.1.6)$$

Ο αριθμός Froude δεν είναι ένας ανεξάρτητος αριθμός, αλλά συνδέεται με τον αριθμό Reynolds με τη σχέση:

$$Fr^2 = \frac{Re}{3} \sin \varphi \quad (3.1.7)$$

Επιπροσθέτως εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες μη- ολίσθησης και διείσδυσης κατά μήκους του τοιχώματος, δηλαδή  $u, v=0$  για  $y=0$ . Επιπλέον, εφαρμόζουμε τη κινηματική συνθήκη και την ισορροπία δυνάμεων κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας:

$$u=v=0 \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (3.1.9)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{T} = We 2H_c \underline{n} \quad (3.1.10)$$

Ο αριθμός Weber ορίζεται από τη σχέση:

$$We = \frac{\sigma}{\rho \cdot U^2 \cdot h_N} \quad (3.1.11)$$

όπου  $\sigma$  είναι η επιφανειακή τάση του ρευστού,  $n$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην ελεύθερη επιφάνεια, το  $T$  δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{T} = -p\underline{I} + \frac{1}{Re} \left[ \underline{\nabla} u + (\underline{\nabla} u)^T \right] \quad (3.1.12)$$

και είναι ο αδιάστατος τανυστής της τάσης,  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας. Τέλος, το  $2H_c$  είναι η μέση καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$2H_c = h_{xx} / (1 + h_x^2)^{3/2} \quad (3.1.13)$$

Επιπλέον αν στο φυσικό μας πρόβλημα υπάρχει κάποια διαταραχή στην είσοδο, εφαρμόζουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στην είσοδο:

$$h(0,t) = 1 + A \cos 2\pi f t \quad (3.1.14)$$

$$u(0, y, t) = \frac{3q(0, t)}{h(0, t)} \left[ \frac{y}{h(0, t)} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h^2(0, t)} \right] \quad (3.1.15)$$

όπου η διαταραχή είναι περιοδική με συχνότητα  $f$  και πλάτος  $A$ . Η σχέση (3.1.14) περιγράφει τις διαταραχές που εφαρμόζονται στην είσοδο και η σχέση (3.1.15) επιβάλλει ένα παραβολικό προφίλ της ταχύτητας στην  $y$ - κατεύθυνση στην είσοδο. Για μικρού πλάτους διαταραχές η παραδοχή του παραβολικού προφίλ της ταχύτητας είναι αρκετά επιτυχημένη. Όσο αναφορά τη  $v$ - ταχύτητα στην είσοδο, αυτή υπολογίζεται με ολοκλήρωση της εξίσωσης της συνέχειας με χρήση της εξίσωσης (3.1.15).

Στην έξοδο εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη ελεύθερης εκροής, έτσι ώστε το ρευστό να φεύγει απαραμόρφωτο από τον υπολογιστικό κানাβο (Malamataris & Papanastasiou, 1991). Τέλος, η συνθήκη μόνιμης κατάστασης εφαρμόζεται ως αρχική συνθήκη για τον περαιτέρω υπολογισμό των αγνώστων.



## Κεφάλαιο

## 4

**4. ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ**

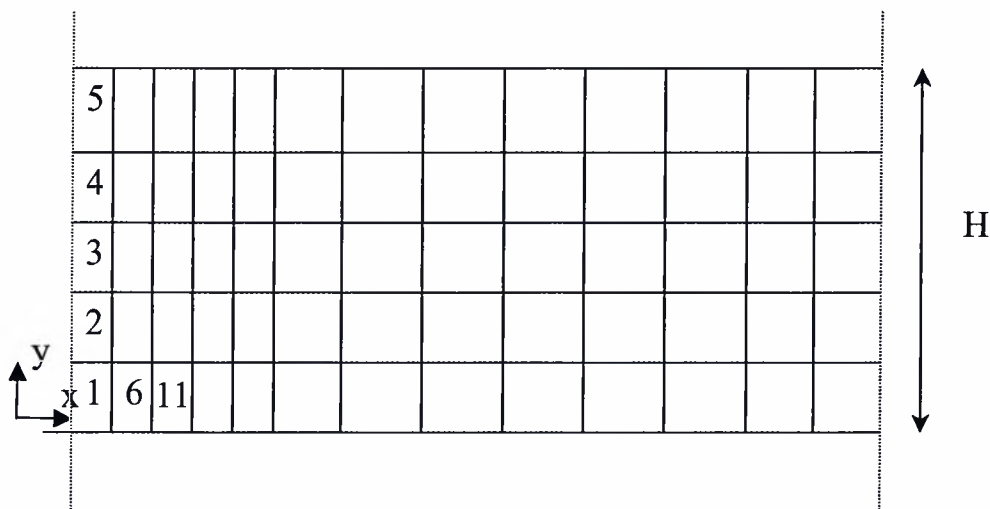
Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα δίνεται ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η διακριτοποίηση της μεθόδου, η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών και ο υπολογισμός των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν.

**4.1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ**

Αρχικά καθορίζουμε το υπολογιστικό πεδίο της διακριτοποίησης ως τη γεωμετρική περιοχή πάνω στην οποία η ροή αναπτύσσεται. Η x-κατεύθυνση εκτείνεται από την περιοχή εισόδου ως την περιοχή εξόδου του υγρού, ενώ η y-κατεύθυνση εκτείνεται από το τοίχωμα μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υμένα. Εφόσον η θέση της ελεύθερης επιφάνειας αλλάζει με το χρόνο και το χώρο είναι βολικό να γίνει μία αδιαστατοποίηση ως προς την y-κατεύθυνση έτσι ώστε οι κόμβοι των στοιχείων να μένουν ανεπηρέαστοι. Αυτό επιτυγχάνεται αδιαστατοποιώντας ως προς τον τοπικό πάχος του υμένα,  $h(x,t)$ , σύμφωνα με τη σχέση:  $\hat{y}=y/h$ . Έτσι,  $\hat{y}=0$  σημαίνει ότι βρισκόμαστε πάνω στο τοίχωμα ενώ το  $\hat{y}=1$  αντιστοιχεί στη θέση της ελεύθερης επιφάνειας.

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει το υπολογιστικό πλέγμα. Έτσι, η θέση του κάθε στοιχείου στο υπολογιστικό πλέγμα καθορίζεται από τις αδιάστατες τροποποιημένες συντεταγμένες  $(x,\hat{y})$ , ενώ η φυσική περιοχή του πλέγματος αλλάζει με το χρόνο. Όσον αφορά τα στοιχεία είναι ισοπαραμετρικά εννέα κόμβων. Στο σχήμα αναπαρίσταται και

ο τρόπος αρίθμησης των στοιχείων. Επίσης η πυκνότητα του πλέγματος αλλάζει στη x-κατεύθυνση ανάλογα με το τι επιδιώκουμε

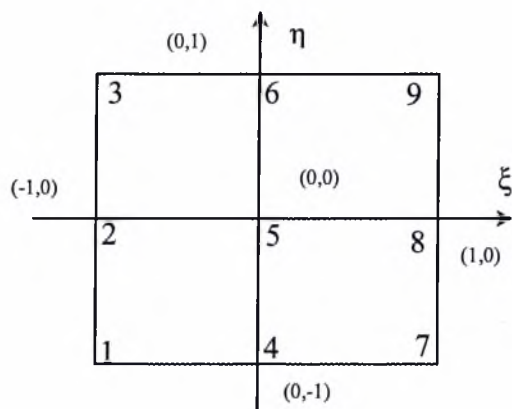


Σχήμα 4.1. Υπολογιστικός κানাβος

Οι κόμβοι αριθμούνται με τρεις διαφορετικούς τρόπους: τοπική αρίθμηση, γενική και αρίθμηση με συντεταγμένες. Η τοπική αρίθμηση αναφέρεται στο κάθε στοιχείο ξεχωριστά και καθορίζει τη σχετική θέση των κόμβων του. Χρησιμοποιείται ευρέως στον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης και στην επίλυση των εξισώσεων, αφού η εφαρμογή της μεθόδου γίνεται σε κάθε κόμβο ξεχωριστά.

Η γενική αρίθμηση είναι η απόλυτη αρίθμηση των κόμβων του πλέγματος, και εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο που γίνεται και η αρίθμηση των στοιχείων, κινούμενοι πρώτα στην y-κατεύθυνση και μετά στον επόμενο κόμβο στην x-κατεύθυνση. Χρησιμοποιείται και για την αποθήκευση των αγνώστων  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$  και της ροϊκής συνάρτησης  $\psi$ . Η υπορουτίνα NODNOR (I,J) του προγράμματος δίνει τη γενική αρίθμηση του προγράμματος.

$NODNOR = (I-1) \cdot NY + J$ , όπου  $NY$  είναι ο αριθμός των κόμβων στον y-άξονα και  $J$  η θέση του συγκεκριμένου κόμβου στην y-κατεύθυνση



Σχήμα 4.2. Αρίθμηση σε ένα στοιχείο

Για τον τελικό καθορισμό του υπολογιστικού πλέγματος είναι βολικό να εισάγουμε και τη διακριτοποίηση στη  $x$  και  $y$  κατεύθυνση. Έτσι, καθορίζουμε τη θέση του κάθε κόμβου ανάλογα με τις συντεταγμένες του σημείου. Το σημείο με συντεταγμένες  $(i,j)$  αντιστοιχεί στον κόμβο που ανοίκει στη γραμμή  $i$  και στη στήλη  $j$ .

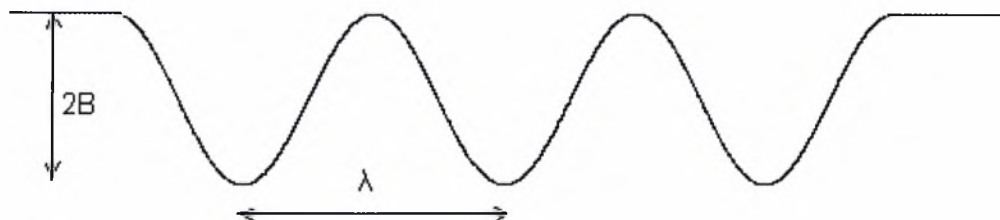
Εάν έχουμε τον τοπικό αριθμό  $J$  ενός κόμβου στο στοιχείο NELL (η αρίθμηση των κόμβων του στοιχείου NELL φαίνεται στο σχήμα 2), τότε η συνάρτηση  $NOP(NELL,J)$  δίνει τη γενική αρίθμηση του κόμβου και επιτρέπει την ανάκτηση των άγνωστων τιμών του κόμβου μέσω του επόμενου κλειστού βρόχου:

```
DO 102 J = 1, 9
  LN    = IABS(NOP(NELL,J))
  XE(J) = X(LN)
  YE(J) = Y(LN)
102 CONTINUE
```

## 4.2. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΟΥΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, η επιφάνεια πάνω στην οποία ρέει ο υμένας αποτελείται από τρεις περιοχές. Αρχικά, το ρευστό εισέρχεται σε μία λεία επίπεδη επιφάνεια έπειτα η επιφάνεια μετατρέπεται σε ημιτονοειδή και τέλος το υγρό

εξέρχεται πάλι πάνω σε μία επίπεδη επιφάνεια. Η δομή της επιφάνειας φαίνεται και στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1. Μορφή ημιτονοειδούς τοιχώματος

Ο συγκεκριμένος κώδικας εμπεριέχει την υπορουτίνα MSHCOO μέσω της οποίας οι κάτω κόμβοι των κάτω στοιχείων, των στοιχείων δηλαδή από όπου το υπολογιστικό πλέγμα ξεκινάει και αναπτύσσεται προς τα πάνω, ταυτίζονται με την ημιτονοειδώς διαμορφωμένη επιφάνεια.

```

DO 12 I = 1, NNX1
DO 12 J = 1, NY
L      = NODNOR(I,J)
X(L)   = XWGHT(I)
Y(L)   = YWGHT(J)*H(I)
12 CONTINUE

DO 10 I = NNX1, NNX2
DO 10 J = 1, NY
L      = NODNOR(I,J)
BPHASE = WNUM*(XWGHT(I)-XWGHT(NNX1))
BCOR   = AMP1*COS(BPHASE)-AMP1
X(L)   = XWGHT(I)
Y(L)   = BCOR + YWGHT(J)*(H(I)-BCOR)
10 CONTINUE

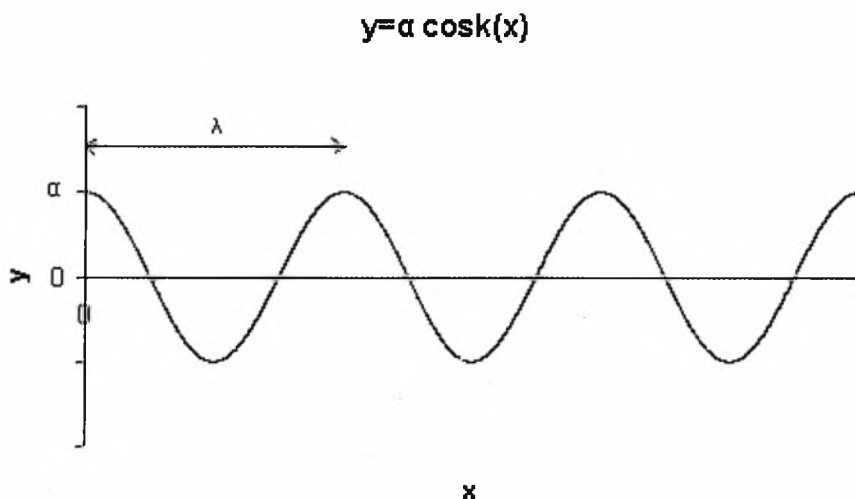
```

```

DO 11 I = NNX2, NNX3
DO 11 J = 1, NY
L      = NODNOR(I,J)
X(L)   = XWGHT(I)
Y(L)   = YWGHT(J)*H(I)
11 CONTINUE

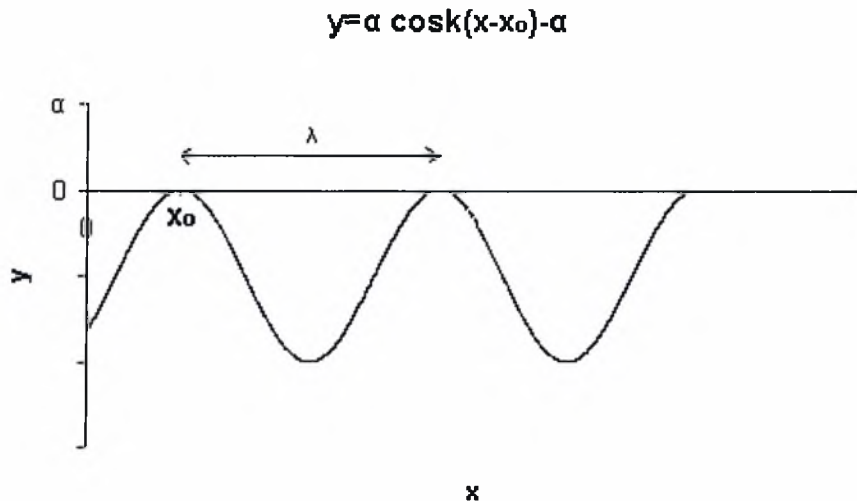
```

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης του συνημιτόνου με μήκος κύματος  $\lambda$  και πλάτος  $a$  (όπου  $a=B$ ) έχει την ακόλουθη μορφή:



όπου  $k$  είναι ο κυματαριθμός και δίνεται από τη σχέση:  $k = \frac{2 \cdot \pi \cdot h_N}{\lambda}$

Για να αποκτήσουμε όμως την επιθυμητή εξίσωση που περιγράφει τη γεωμετρία του τοιχώματος θα πρέπει την εξίσωση  $y = a \cdot \cos(kx)$  να την μετατοπίσουμε στον οριζόντιο άξονα κατά  $x_0$  και στον άξονα  $y$  κατά  $-a$ . Η αντίστοιχη γραφική παράσταση της εξίσωσης  $y = a \cdot \cos k(x - x_0) - a$  είναι:



Η καρδιά της υπορουτίνας είναι οι δύο βρόχοι. Η θέση του τοιχώματος μέσα στην υπορουτίνα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$BCOR = AMP1 * \cos(BPHASE) - AMP1$$

όπου BPHASE είναι το  $k(x - x_0)$  και AMP1 είναι το  $a$ .

#### 4.3. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Οι κύριοι άγνωστοι του προβλήματος  $u$ ,  $v$ ,  $p$  και  $h$  εκφράζονται με την παρακάτω μορφή συναρτήσεων βάσης:

$$u = \sum_{i=1}^9 u_i \phi^i, \quad v = \sum_{i=1}^9 v_i \phi^i, \quad h = \sum_{i=1}^3 h_i \phi^i, \quad p = \sum_{i=1}^4 p_i \psi^i. \quad (4.3.1)$$

όπου  $\phi^i$  είναι οι διτετράγωνες συναρτήσεις βάσης και  $\psi^i$  οι γραμμικές. Η συγκεκριμένη επιλογή των συναρτήσεων βάσης είναι και η συνηθέστερη στα προβλήματα επίλυσης ροών με τη μέθοδο Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων.

Στη μέθοδο Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων οι σχέσεις για κάθε πρόβλημα εφαρμόζονται στους κόμβους κάθε στοιχείου με την τοπική αρίθμηση των κόμβων. Στο

σχήμα 4.2 φαίνεται ο τρόπος αρίθμησης των κόμβων ενός στοιχείου με τις τοπικές συντεταγμένες ( $\xi, \eta$ ). Οι συντεταγμένες  $x, y$  μετατρέπονται σε  $\xi, \eta$  με τον ίδιο τρόπο που εκφράζονται και οι άγνωστοι του προβλήματος, μέσω των συναρτήσεων βάσης:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 x_i \cdot \phi^i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 y_i \cdot \phi^i \quad (4.3.2)$$

Η σχέση (4.3.2) αποτελεί την κεντρική ιδέα της ισοπαραμετρικής απεικόνισης, διαδικασίας στην οποία βασιζόμαστε για να εκφράσουμε τους αγνώστους μας με τη μορφή συναρτήσεων βάσης. Βασικό χαρακτηριστικό των ισοπαραμετρικών στοιχείων είναι ότι μπορεί να προσομοιάσει γεωμετρίες με καμπύλο σύνορο (σχήμα 4.3), με καλή ακρίβεια.



Σχήμα 4.3. Σχηματική αναπαράσταση της μετατροπής μιας στρεβλής γεωμετρίας σε κανονική με τη μέθοδο της ισοπαραμετρικής απεικόνισης

Πάνω το σχήμα 4.2 θεωρούμε μία μέθοδο παρεμβολής με τόσους αγνώστους όσοι είναι οι κόμβοι του στοιχείου. Έτσι, προκύπτει:

$$u(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta + a_5 \xi^2 + a_6 \eta^2 + a_7 \xi^2 \eta + a_8 \xi \eta^2 + a_9 \xi^2 \eta^2 \quad (4.3.3)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση παρεμβολής (4.3.3) σε κάθε κόμβο, προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα 9 εξισώσεων με 9 αγνώστους, τους  $a_i$ ,  $i=1,9$ . Το σύστημα των εξισώσεων είναι της μορφής:  $\underline{u} = \underline{C} \cdot \underline{a}$ .

Όπου:



$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, αντιστρέφοντας τον πίνακα προκύπτει:  $\underline{\alpha} = \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{u}^e$  (4.3.4)

Αντικαθιστώντας την (4.3.4) στην (4.3.3), ισχύει για ένα τυχαίο σημείο  $\xi, \eta$ :

$$u(\xi, \eta) = (1, \xi, \eta, \dots, \xi^2 \eta^2) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_9 \end{pmatrix} = \underline{\beta} \cdot \underline{a} = (\underline{\beta} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1}) \cdot \underline{u}^e$$

Θέτοντας  $\underline{\varphi} = \underline{\beta} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \Rightarrow \varphi^i = \beta_i \cdot C_{ij}^{-1}$  προκύπτει:

$$u(\xi, \eta) = \underline{\varphi} \cdot \underline{u}^e = \sum_{i=1}^9 u_i \varphi^i(\xi, \eta)$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις βάσης δίνονται από τη σχέση:

$$\varphi^i = \beta_i \cdot C_{ij}^{-1} \quad (4.3.5)$$

Οι τιμές των αγνώστων  $u_i$  ποικίλλουν από στοιχείο σε στοιχείο, αφού οι τιμές των συναρτήσεων βάσης στους κόμβους ικανοποιούν την ταυτότητα:

$$\varphi^i(\xi_i, \eta_i) = 1, \varphi^j(\xi_i, \eta_i) = 0, j \neq i$$

Αναπτύσσοντας τη σχέση (4.3.5), προκύπτει η αναλυτική μορφή και εξάρτηση των συναρτήσεων βάσης από τα  $\xi$  και  $\eta$ . Μία παρόμοια ανάλυση μπορεί να ακολουθηθεί και για τα στοιχεία με 4 κόμβους. Η τελική μορφή για όλες τις συναρτήσεις βάσης είναι η ακόλουθη:



$$\varphi(1) = 0.25 * \xi * (\xi - 1.) * \eta * (\eta - 1.)$$

$$\varphi(2) = 0.5 * \xi * (\xi - 1.) * (1. - \eta * \eta)$$

$$\varphi(3) = 0.25 * \xi * (\xi - 1.) * \eta * (\eta + 1.)$$

$$\varphi(4) = 0.5 * (1. - \xi * \xi) * \eta * (\eta - 1.)$$

$$\varphi(5) = (1. - \xi * \xi) * (1. - \eta * \eta)$$

$$\varphi(6) = 0.5 * (1. - \xi * \xi) * \eta * (\eta + 1.)$$

$$\varphi(7) = 0.25 * \xi * (\xi + 1.) * \eta * (\eta - 1.)$$

$$\varphi(8) = 0.5 * \xi * (\xi + 1.) * (1. - \eta * \eta)$$

$$\varphi(9) = 0.25 * \xi * (\xi + 1.) * \eta * (\eta + 1.)$$

για τις διτετράγωνες συναρτήσεις βάσης και:

$$\psi(1) = 0.25 * (1. - \xi) * (1. - \eta)$$

$$\psi(2) = 0.25 * (1. - \xi) * (1. + \eta)$$

$$\psi(3) = 0.25 * (1. + \xi) * (1. - \eta)$$

$$\psi(4) = 0.25 * (1. + \xi) * (1. + \eta)$$

για τις γραμμικές συναρτήσεις βάσης.

Οι παράγωγοι ως προς  $\xi$  και  $\eta$ , είναι:

$$\varphi_{\xi}(1) = \eta * (\eta - 1.) * (0.5 * \xi - 0.25)$$

$$\varphi_{\xi}(2) = (1. - \eta * \eta) * (\xi - 0.5)$$

$$\varphi_{\xi}(3) = \eta * (\eta + 1.) * (0.5 * \xi - 0.25)$$

$$\varphi_{\xi}(4) = -\xi * \eta * (\eta - 1.)$$

$$\varphi_{\xi}(5) = -2. * \xi * (1. - \eta * \eta)$$

$$\varphi_{\xi}(6) = -\xi * \eta * (\eta + 1.)$$

$$\varphi_{\xi}(7) = \eta * (\eta - 1.) * (0.5 * \xi + 0.25)$$

$$\varphi_{\xi}(8) = (1. - \eta * \eta) * (\xi + 0.5)$$

$$\varphi_{\xi}(9) = \eta * (\eta + 1.) * (0.5 * \xi + 0.25)$$

$$\varphi_{\eta}(1) = \xi * (\xi - 1) * (0.5 * \eta - 0.25)$$

$$\varphi_{\eta}(2) = -\eta * \xi * (\xi - 1)$$

$$\varphi_{\eta}(3) = \xi * (\xi - 1) * (0.5 * \eta + 0.25)$$

$$\varphi_{\eta}(4) = (1 - \xi * \xi) * (\eta - 0.5)$$

$$\varphi_{\eta}(5) = -2 * \eta * (1 - \xi * \xi)$$

$$\varphi_{\eta}(6) = (1 - \xi * \xi) * (\eta + 0.5)$$

$$\varphi_{\eta}(7) = \xi * (\xi + 1) * (0.5 * \eta - 0.25)$$

$$\varphi_{\eta}(8) = -\eta * \xi * (\xi + 1)$$

$$\varphi_{\eta}(9) = \xi * (\xi + 1) * (0.5 * \eta + 0.25)$$

Αν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι εκφρασμένες με όρους των κανονικών χωρικών συντεταγμένων, παίρνουμε εκφράσεις με την ακόλουθη μορφή:

$$u(x, y) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 xy + \dots \quad (4.3.6)$$

Η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων μεταξύ των  $(\xi, \eta)$  και των  $(x, y)$  συντεταγμένων επιβάλλει κάποιες σχέσεις συνοχής. Από τη σχέση

$$u(\xi, \eta) = \sum u_i \varphi_i(\xi, \eta) \text{ και θεωρώντας ότι οι κόμβοι παραμένουν οι ίδιοι προκύπτει:}$$

$$u(x, y) = \sum u_i \varphi_i(\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad (4.3.7)$$

Αν οι κόμβοι έχουν συντεταγμένες  $x_i, y_i$ , τότε ισχύει:

$$u_i = \gamma_1 + \gamma_2 x_i + \gamma_3 y_i + \dots \quad (4.3.8)$$

Και αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (4.3.6), (4.3.7) και (4.3.8) τότε προκύπτει:

$$u(x, y) = \sum (\gamma_1 + \gamma_2 x_i + \gamma_3 y_i + \dots) \varphi_i$$

$$\text{ή } \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \dots = \gamma_1 \sum \varphi_i + \gamma_2 \sum x_i \varphi_i + \gamma_3 \sum y_i \varphi_i + \dots$$

$$\sum \varphi_i = 1, x = \sum x_i \varphi_i, y = \sum y_i \varphi_i$$

που ισοδυναμεί με: (4.3.9)

Αυτές οι σχέσεις είναι οι σχέσεις της ισοπαραμετρικής απεικόνισης όπως τις είχαμε δείξει παραπάνω.

#### 4.4. ΤΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή, ολοκληρωμένες με τις συναρτήσεις βάσης, δίνουν τα ακόλουθα σταθμισμένα υπόλοιπα: κινηματικά  $R_K^i$ , αδρανειακά  $R_M^i$  και συνέχειας  $R_C^i$ :

$$R_C^i = \int_V \nabla \cdot u \psi^i dV \quad (4.4.1)$$

$$R_M^i = \int_V \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nabla \cdot \tau - \frac{1}{Fr} g \right) \varphi^i dV \quad (4.4.2)$$

$$R_K^i = \int_S \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v \right) \varphi^i dS \quad (4.4.3)$$

Αναλύοντας τη σχέση (4.4.2) προκύπτει:

$$R_M^i = \int_V \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nabla \cdot \tau - \frac{1}{Fr} g \right) \varphi^i dV \rightarrow$$

$$R_M^i = \int_V \left[ \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \frac{1}{Fr} \underline{g} \right) \varphi^i - \underline{T} \cdot \nabla \varphi^i \right] dV - \int_S \underline{n} \cdot \underline{T} \varphi^i dS \quad (4.4.4)$$

όπου  $\underline{T}$  είναι ο αδιάστατος τανυστής των τάσεων.

Εφόσον οι βασικές συνοριακές συνθήκες για τις ταχύτητες  $u$  και  $v$  εφαρμόζονται στα σύνορα του πεδίου ροής, εκτός από το σύνορο εκροής και κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας η σχέση (4.4.4) αντικαθίσταται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u=v=0 \quad (3.1.8)$$

$$h(0,t)=1+A\cos 2\pi ft \quad (3.1.14)$$

$$u(0,y,t)=\frac{3q(0,t)}{h(0,t)}\left[\frac{y}{h(0,t)}-\frac{1}{2}\frac{y^2}{h^2(0,t)}\right] \quad (3.1.15)$$

Κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας το επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης (4.4.4) αντικαθίσταται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (3.1.9)$$

$$\underline{n} \cdot \underline{T} = We 2 H_e \underline{n} \quad (3.1.10)$$

Το ενδιαφέρον σημείο στην εφαρμογή της μεθόδου είναι στην εφαρμογή της σχέσης (4.4.4) στην έξοδο. Συγκεκριμένα, αντί να εφαρμόσουμε κάποιο είδος περιοδικής συνοριακής συνθήκης, επεκτείνουμε το εύρος εφαρμογής της Galerkin περιλαμβάνοντας την έξοδο. Έτσι οι τιμές των αγνώστων στην έξοδο αποτελούν μέρος της λύσης μας. Αυτό επιτρέπει την περιγραφή της ανεπτυγμένης ροής χωρίς κάποιους περιορισμούς από τυχόν μη αποδοτικές συνοριακές συνθήκες (Malamataris, 1991).

## 4.5. ΧΩΡΙΚΟΙ & ΧΡΟΝΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων επιβάλλει τον υπολογισμό διαφόρων χωρικών και χρονικών παραγώγων των άγνωστων συναρτήσεων και την ενσωμάτωση αυτών των υπολογισμών στον υπολογισμό των σταθμισμένων υπολοίπων. Το αποτέλεσμα είναι ένα μη γραμμικό, αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων ως προς τις τιμές των άγνωστων συναρτήσεων, το οποίο αντιστρέφεται αριθμητικά για να πάρουμε τη λύση του προβλήματος.

Οι χωρικές παράγωγοι υπολογίζονται εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για να μετακινηθούμε από το σύστημα συντεταγμένων (x,y) στο (ξ,η). Έτσι προκύπτει:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.5.2)$$

Οι παράγωγοι  $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \dots$  υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 \quad (4.5.5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4.5.6)$$

Οι σχέσεις (4.5.3) και (4.5.6) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα:  $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}$ . Η λύση του συστήματος δίνει:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial y / \partial \eta}{J}, \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-\partial y / \partial \xi}{J} \quad (4.5.7)$$

όπου  $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$  είναι η ορίζουσα της Ιακωβιανής.

Σύμφωνα με την προηγούμενη λογική, οι σχέσεις (4.5.4), (4.5.5) αποτελούν και αυτές ένα παρόμοιο σύστημα το οποίο έχει ως λύση τις ακόλουθες εκφράσεις για τα  $\frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-\partial x / \partial \eta}{J}, \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial x / \partial \xi}{J} \quad (4.5.8)$$

Οι παράγωγοι  $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \dots$  υπολογίζονται απευθείας από τις σχέσεις (4.3.9) της

ισοπαραμετρικής απεικόνισης. Προκύπτει:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \quad (4.5.9)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \quad (4.5.10)$$

Για τον υπολογισμό των χρονικών παραγώγων πρέπει να ληφθούν υπόψη οι αλλαγές του φυσικού πλέγματος με το χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, οι μερικές παράγωγοι ως προς το χρόνο σε μία συγκεκριμένη θέση δεν μπορούν να υπολογιστούν με την απλή μορφή:  $\frac{Z(n+1) - Z(n)}{dt}$ , επειδή κατά τη διάρκεια του χρονικού βήματος  $dt$  ο κόμβος έχει μετακινηθεί στο φυσικό χώρο. Χρησιμοποιώντας τη σχέση για τη χρονική παράγωγο σε ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων, προκύπτει:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{dZ}{dt} - w \cdot \nabla Z = \frac{dZ}{dt} - \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (4.5.11)$$

Η ταχύτητα για τον εν λόγω κόμβο υπολογίζεται από τη χρονική μεταβολή της φυσικής θέσης των κόμβων. Πιο συγκεκριμένα, σημειώνουμε ότι ο ανασχηματισμός του πλέγματος σε κάθε χρονικό βήμα μετατοπίζει τους κόμβους μόνο στην  $y$  κατεύθυνση. Έτσι, η μερική χρονική παράγωγος βρίσκεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (4.5.12)$$

$$\text{όπου } u = \frac{y(n+1) - y(n)}{dt}.$$

Τα σταθμισμένα υπόλοιπα υπολογίζονται αριθμητικά με τη Gaussian ολοκλήρωση με χρήση εννέα κόμβων. Προκύπτει ένα μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων το οποίο λύνεται με τη επαναληπτική μέθοδο Newton- Raphson σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

$$\underline{q}^{(n+1)} = \underline{q}^{(n)} - \underline{J}^{-1} \underline{R}(\underline{q}^{(n)}) \quad (4.5.13)$$

όπου  $\underline{q}^T = [u_1, v_1, p_1, h_1, \dots, u_N, v_N, p_N, h_N]$  είναι το διάνυσμα των αγνώστων και  $\underline{J} = \partial \underline{R} / \partial \underline{q}$  είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα των σταθμισμένων υπολοίπων  $\underline{R}$  ως προς τις κομβικούς αγνώστους  $\underline{q}$ . Η τελική ορίζουσα που εξάγουμε και περιλαμβάνει όλες τις (γραμμικές) εξισώσεις λύνεται με ένα frontal solver σε κάθε επανάληψη. Η επαναληπτική μέθοδος Newton συγκλίνει τετραγωνικά σε 3 έως 6 επαναλήψεις ανεξάρτητα από την πυκνότητα του πλέγματος.

Η χρονική μετάβαση γίνεται με την πεπλεγμένη μέθοδο Grank- Nicolson. Πιο συγκεκριμένα, για μία εξίσωση της μορφής:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F(z)$$

χρησιμοποιούμε το αναλυτικό αριθμητικό σχήμα:

$$\frac{z(n+1) - z(n)}{dt} = \frac{1}{2} [F(z(n)) + F(z(n+1))] \quad (4.5.14)$$

## Κεφάλαιο

# 5

### 5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται η μορφή της ροής και περιγράφονται οι αλλαγές που συμβαίνουν με μεταβολή δύο σημαντικών παραμέτρων: του βάθους τοιχώματος και του αριθμού Reynolds. Τα βασικά χαρακτηριστικά που περιγράφουν τη ροή ενός υμένα είναι η θέση της ελεύθερης επιφάνειας και η ύπαρξη δινών εσωτερικά της ροής.

Η ύπαρξη δίνης εσωτερικά της ροής ενός υγρού υμένα καθώς και οι διαταραχές που συμβαίνουν στην ελεύθερη επιφάνεια παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη φυσική του προβλήματος. Για παράδειγμα επηρεάζουν τους συντελεστές μετάδοσης θερμότητας από/ προς το τοίχωμα, τον ρυθμό απορρόφησης και διάχυσης ενός υπερκείμενου αερίου εσωτερικά στο ρευστό, καθώς και τη διατμητική τάση στο τοίχωμα, η οποία επιδρά σε φαινόμενα επικάθισης/ αποκόλλησης. Για το λόγο αυτό πρέπει να εξεταστεί πότε εμφανίζονται οι δίνες στη ροή, το πλήθος τους, τα χαρακτηριστικά τους και τι μέγεθος έχουν. Παράλληλα πρέπει να εξεταστούν οι διαταραχές της ελεύθερης επιφάνειας. Πότε οι κυματώσεις αυτές παίρνουν τις μέγιστες τιμές, τι μορφή έχουν και ποια είναι τα χαρακτηριστικά τους.



## 5.2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι αλλαγές στη μορφή της ροής, εμφάνιση δινών- μετακίνηση ελεύθερης επιφάνειας, για συγκεκριμένες τιμές αριθμού Reynolds σε διάφορα βάθη τοιχώματος. Το ρευστό, το οποίο είναι νερό, ρέει υπό την επίδραση της βαρύτητας πάνω σε κεκλιμένο τοίχωμα γωνίας 10 μοιρών. Η επίδραση της γωνίας κλίσης δεν μελετήθηκε στην παρούσα εργασία. Τα αποτελέσματα για την μία κλίση που εξετάστηκε αναμένεται να είναι ποιοτικά αντιπροσωπευτικά για όλο το φάσμα των κλίσεων. Ποσοτικά, οι διαφοροποιήσεις προβλέπεται να οφείλονται στο γεγονός ότι σε μικρές κλίσεις η βαρύτητα έχει μία ισχυρά σταθεροποιητική συνιστώσα (κάθετη προς το τοίχωμα) ενώ σε μεγάλες κλίσεις ( $\sim 90^\circ$ ) είναι σχεδόν αποκλειστικά αποσταθεροποιητική (επιταχύνει το υγρό).

Το τοίχωμα που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα προσομοίωση αποτελείται από τρεις περιοχές: ένα επίπεδο τμήμα μήκους 0,01 m (είσοδος), ένα κυματοειδές τμήμα, 0,072 m, με μήκος κύματος 0,012 m και μεταβλητό πλάτος και τέλος ένα επίπεδο τμήμα μήκους 0,01 m (έξοδος). Τα επίπεδα τμήματα επιλέχθηκαν ώστε να εξασφαλίζεται ομαλότερη είσοδος και έξοδος του υγρού από το υπολογιστικό πεδίο. Αποτελεί επίσης το τοίχωμα μία σχετικά πιστή αναπαράσταση εργαστηριακής διάταξης όπου έχουν πρόσφατα συλλεγεί μετρήσεις (Vlachogiannis & Bontozoglou, 2002).

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμπεραίνουμε ότι σε σχετικά μικρό αριθμό Reynolds, (Reynolds μικρότερο του 40), οι δίνες που εμφανίζονται στη ροή του υμένα είναι το πολύ δύο, και είναι σχεδόν συμμετρικές κατά τις διευθύνσεις ανάντη και κατάντη της ροής. Η πρόβλεψη αυτή συμφωνεί με τα αποτελέσματα των N. Aksel, A. Wierschem και M. Scholle (Φεβρουάριος 2003) οι οποίοι παρατήρησαν στα πειράματά του ότι σε μικρούς αριθμούς Reynolds σχηματίζονται δύο το πολύ συμμετρικές δίνες. Η μία από τις δύο δίνες σχηματίζεται σε μικρό σχετικά βάθος τοιχώματος. Η δεύτερη όμως σχηματίζεται σε μεγάλο βάθος. Μάλιστα αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος η δεύτερη αυτή δίνη σχηματίζεται σε μικρότερο βάθος.

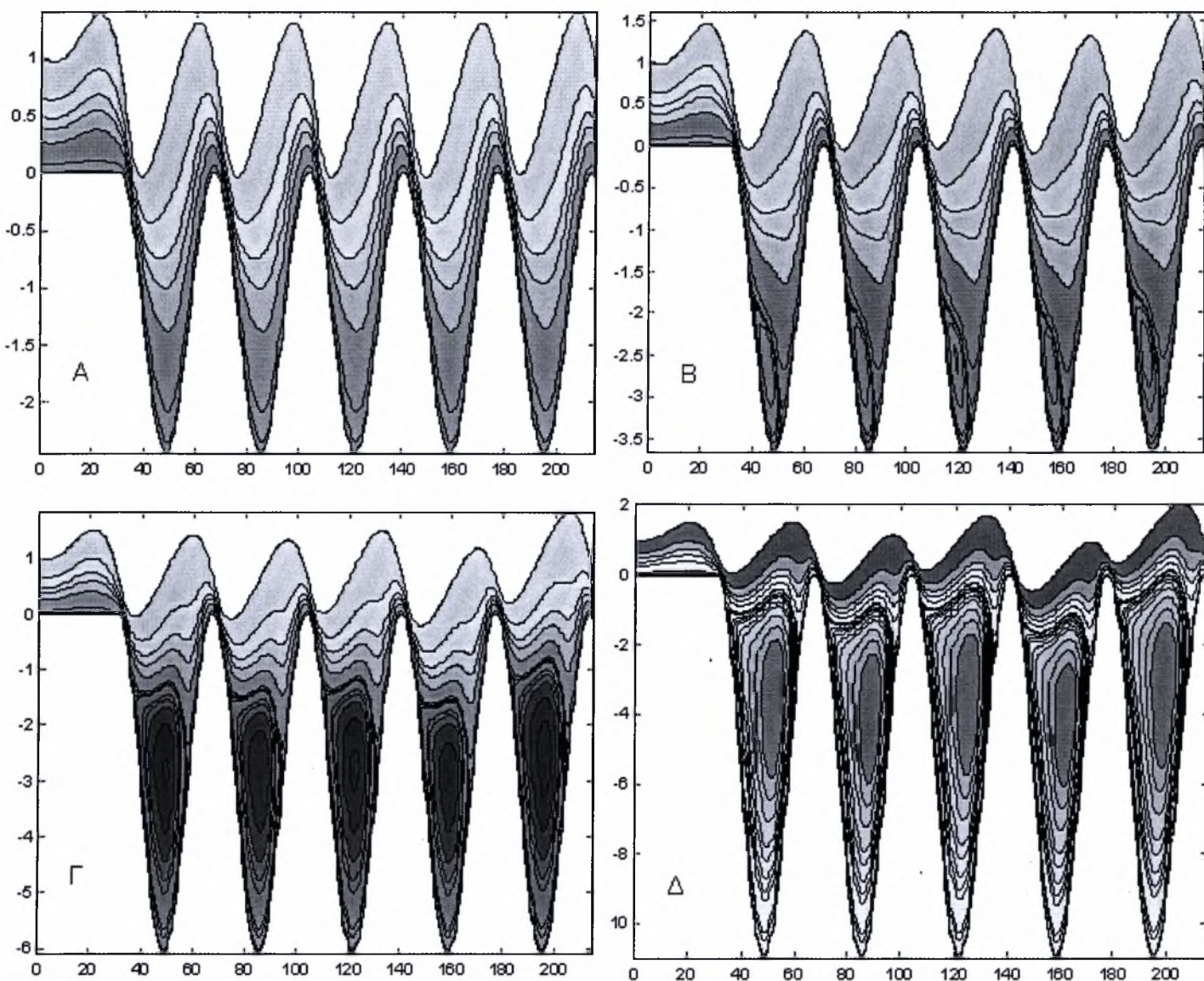
Σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds, ( $Re > 60$ ), οι δύο αυτές δίνες σχηματίζονται σε μικρότερο βάθος τοιχώματος και σταδιακά εμφανίζουν έντονη ασυμμετρία. Με περαιτέρω αύξηση του βάθους του τοιχώματος σχηματίζεται μία τρίτη δίνη και σε αρκετές περιπτώσεις μία τέταρτη.

Θα μπορούσαμε να πούμε σε αυτό το σημείο ότι οι βασικές δίνες οι οποίες χαρακτηρίζουν τη ροή του υγρού υμένα είναι οι δύο δίνες οι οποίες σχηματίζονται ανεξαρτήτως αριθμού Reynolds. Η επίδραση της τρίτης και τέταρτης δίνης είναι ασήμαντη, καθώς αυτές σχηματίζονται σε πολύ λίγες περιπτώσεις για μεγάλους αριθμούς Reynolds, και το μέγεθος και η έντασή τους είναι τέτοια που επηρεάζουν αμελητέα τη ροή.

Στις επόμενες ενότητες εξετάζονται ορισμένες αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις αριθμού Reynolds όπου παρουσιάζονται οι διαφορές τους. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζεται η μορφή της ροής για - 4 - τέσσερις διαφορετικούς αριθμούς Reynolds, από τους οποίους οι δύο είναι μικροί και οι δύο σχετικά υψηλοί. Στην πρώτη περίπτωση σχηματίζονται δύο δίνες και στη δεύτερη περισσότερες. Παρατηρούμε παρακάτω ότι η επιρροή του αριθμού Reynolds έγκειται στο πλήθος των δινών, στο εύρος της δίνης, στην θέση της δίνης και στις ταχύτητες εσωτερικά αυτής. Από την άλλη πλευρά, η επίδραση του βάθους τοιχώματος στη μορφή της ροής είναι ακόμα μεγαλύτερη. Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι σε μικρό βάθος τοιχώματος, εσωτερικά της ροής δεν εμφανίζεται καμιά δίνη.

### 5.2.1. Αριθμός Reynolds 20

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τη μορφολογία της ροής του υμένα για αριθμό Reynolds 20. Σε μικρό βάθος τοιχώματος  $2B=0,0008$  m, ( $amp=0,0004$  m), παρατηρούμε ότι το ρευστό ρέει κανονικά πάνω από το τοίχωμα. Στην ελεύθερη επιφάνεια υπάρχουν διαταραχές, αλλά εσωτερικά της ροής δεν έχει σχηματιστεί κάποια δίνη.

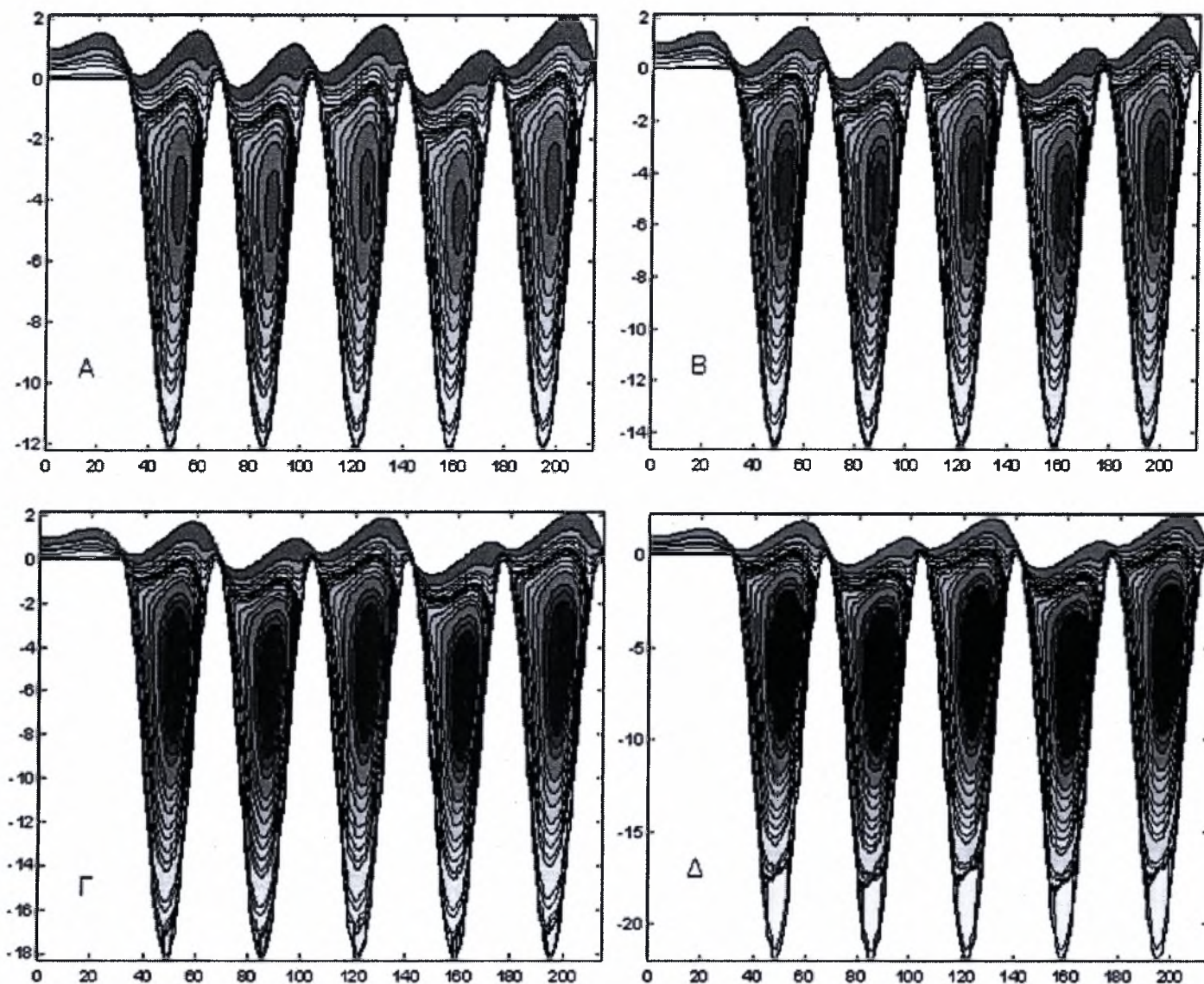


Σχήμα 5.2.1 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=20$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0008  
B. 0,0012 Γ. 0,0020 Δ. 0,0036

Αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος σε 0,0012 m σχηματίζεται μία ασύμμετρη δίνη στον πάτο της κοιλότητας στην πλευρά που βρίσκεται ανάντη της ροής. Συνεχίζοντας την αύξηση του βάθους του τοιχώματος στα 0,002 m παρατηρούμε ότι η δίνη γίνεται πιο συμμετρική και βρίσκεται πλέον στο κέντρο της κοιλότητας. Με

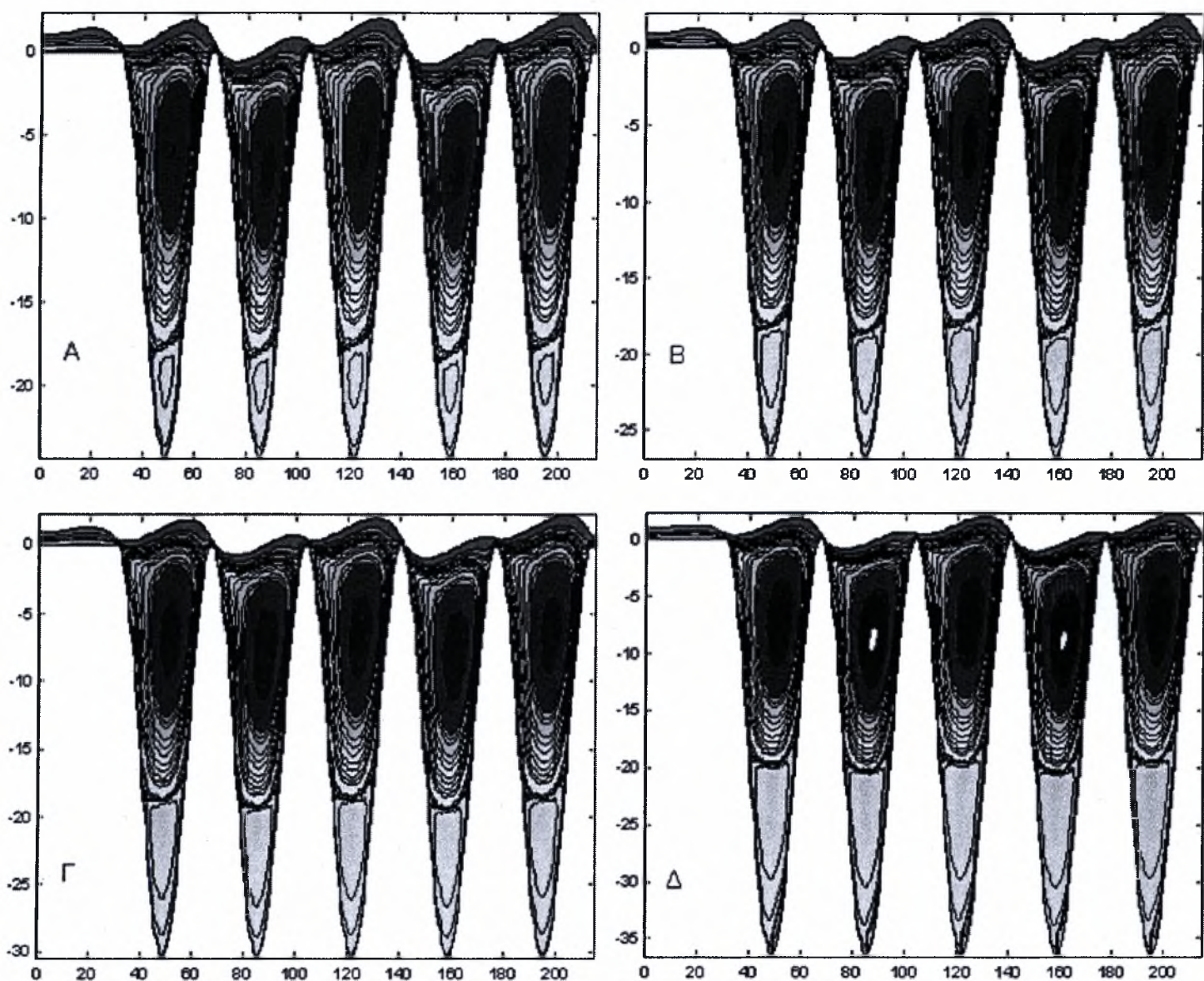


περαιτέρω αύξηση του βάθους του τοιχώματος αυξάνει το ύψος της και ταυτόχρονα κινείται προς την ελεύθερη επιφάνεια.



Σχήμα 5.2.2 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=20$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0040  
B. 0,0048     Γ. 0,0060     Δ. 0,0072

Όσο αναφορά την ελεύθερη επιφάνεια σε όλες τις περιπτώσεις δημιουργούνται διαταραχές οι οποίες μεταβάλλονται με την αύξηση του βάθους του τοιχώματος και έχουν μέγεθος συγκρίσιμο με το βάθος του τοιχώματος. Περαιτέρω ανάλυση ως προς τα χαρακτηριστικά της ελεύθερης επιφάνειας θα δοθεί σε παρακάτω ενότητα.



Σχήμα 5.2.3 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=20$  και βάθος τοιχώματος: A. 0,0080  
B. 0,0088 Γ. 0,010 Δ. 0,012

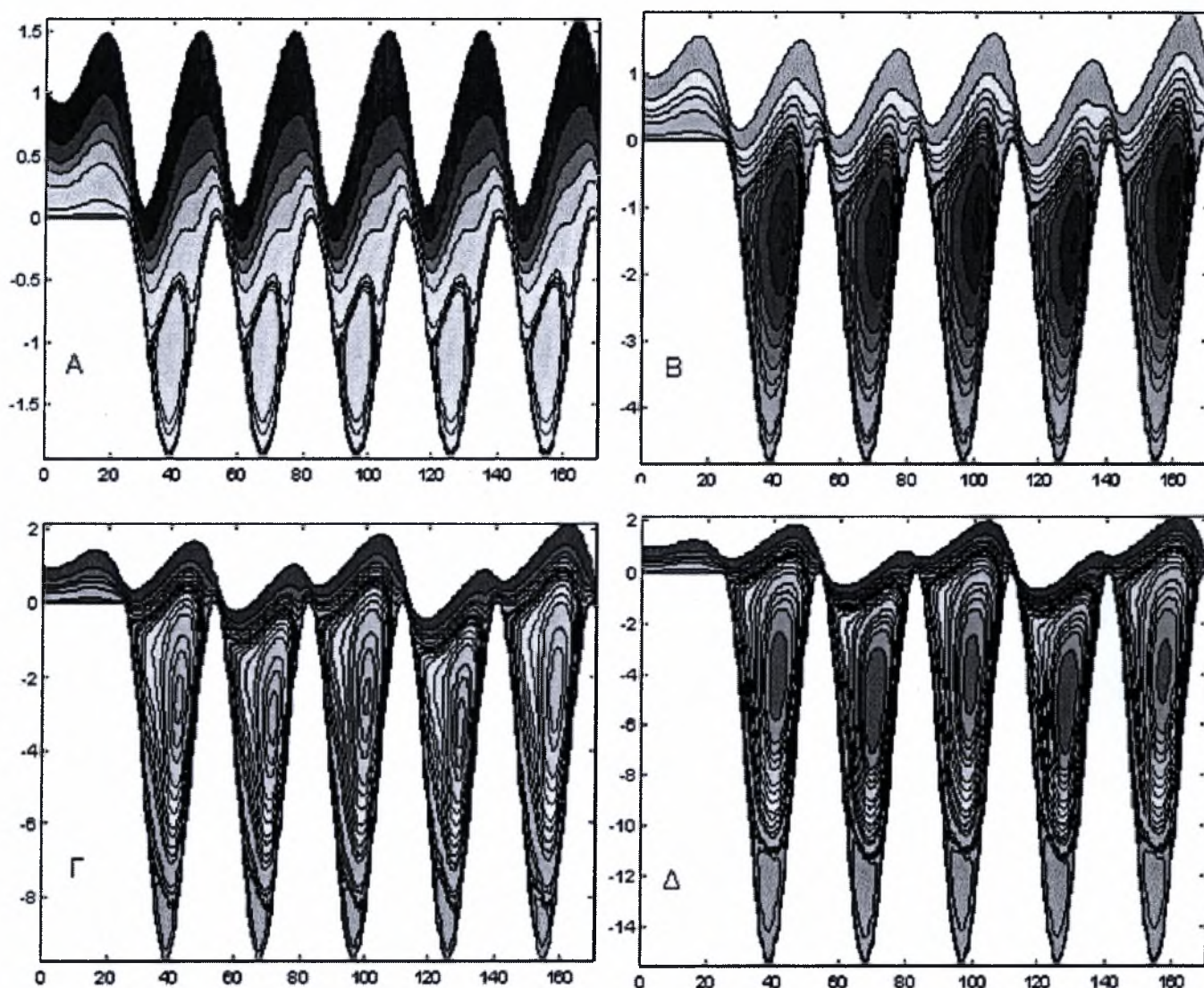
Στα σχήματα 5.2.2 και 5.2.3 παρατηρούμε ότι αυξάνοντας επιπλέον το βάθος του τοιχώματος το ύψος της δίνης παύει να αυξάνεται. Έτσι, η δίνη καλύπτει μικρότερο χώρο της κοιλότητας και αδυνατεί να φτάσει μέχρι τον πάτο της. Σε βάθος τοιχώματος 0,006 m



εμφανίζεται μία δεύτερη δίνη στο βάθος της κοιλότητας. Αυξάνοντας το βάθος σταδιακά από 0,006 m σε 0,012 m η κάτω αυτή δίνη μεγαλώνει ενώ η πάνω δίνη συρρικνώνεται.

### 5.2.2. Αριθμός Reynolds 40

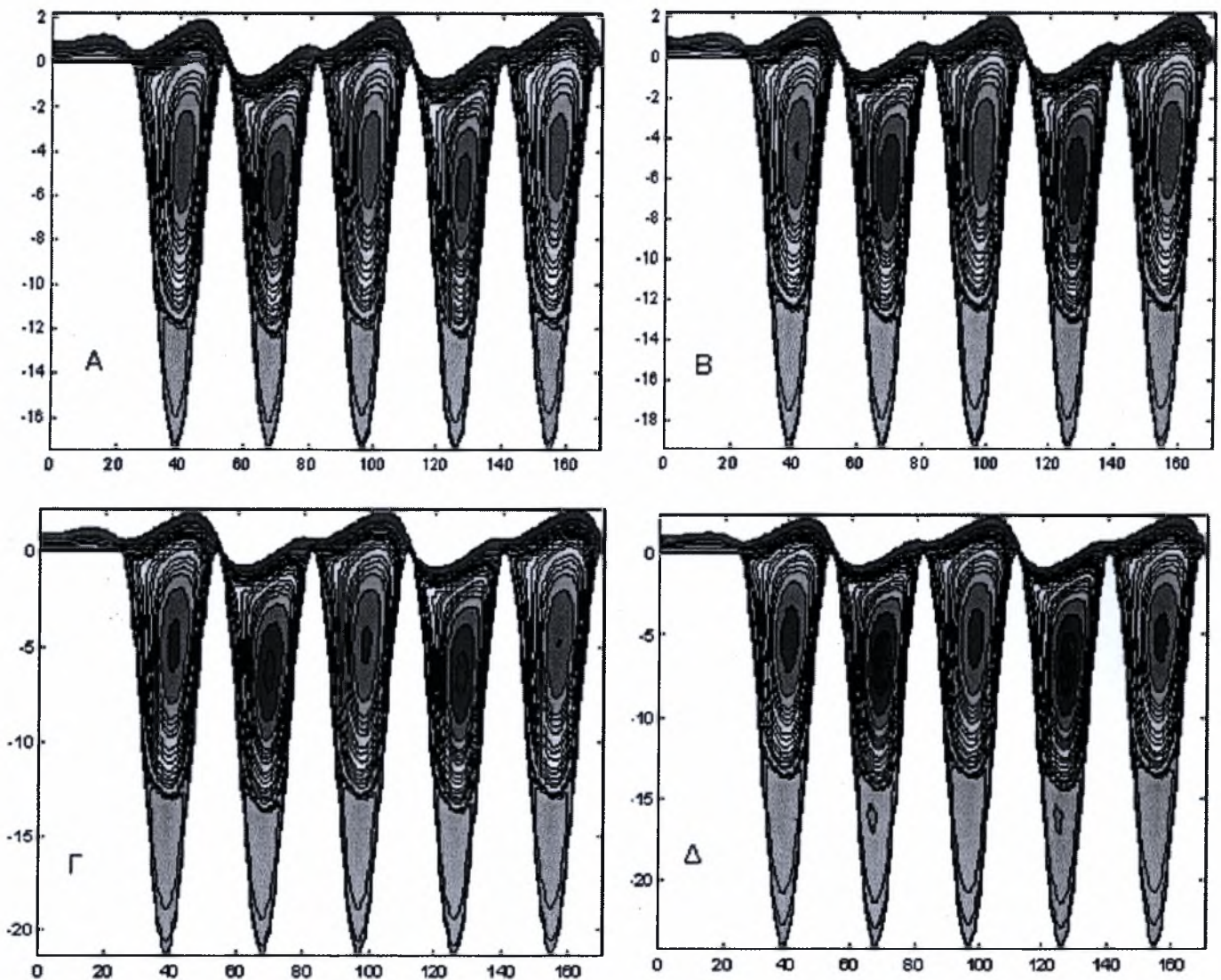
Στο σχήμα 5.2.4 φαίνεται ότι σε μικρό μόλις βάθος 0,0008 m -μικρότερο σε σχέση με την περίπτωση που ο αριθμός Reynolds είναι 20- σχηματίζεται μία ασύμμετρη δίνη στον πάτο της κοιλότητας, η οποία αυξάνοντας το βάθος μεγαλώνει.



Σχήμα 5.2.4 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=40$  και βάθη τοιχώματος: Α. 0,0008  
Β. 0,0020     Γ. 0,0040     Δ. 0,0064

Σε βάθος τοιχώματος 0,004 m εμφανίζεται και η δεύτερη δίνη στον πάτο της κοιλότητας. Ενώ σταδιακά η πρώτη δίνη γίνεται όλο και πιο συμμετρική.

Συγκρίνοντας το παρακάτω σχήμα 5.2.1 με το σχήμα 5.2.4 παρατηρούμε ότι η ροή για αριθμό Reynolds 40 είναι πιο έντονη σε σύγκριση με τη ροή στην περίπτωση που ο αριθμός Reynolds είναι 20. Τα ίδια χαρακτηριστικά της ροής – εμφάνιση πρώτης και δεύτερης δίνης – συμβαίνουν σε μικρότερο βάθος τοιχώματος.

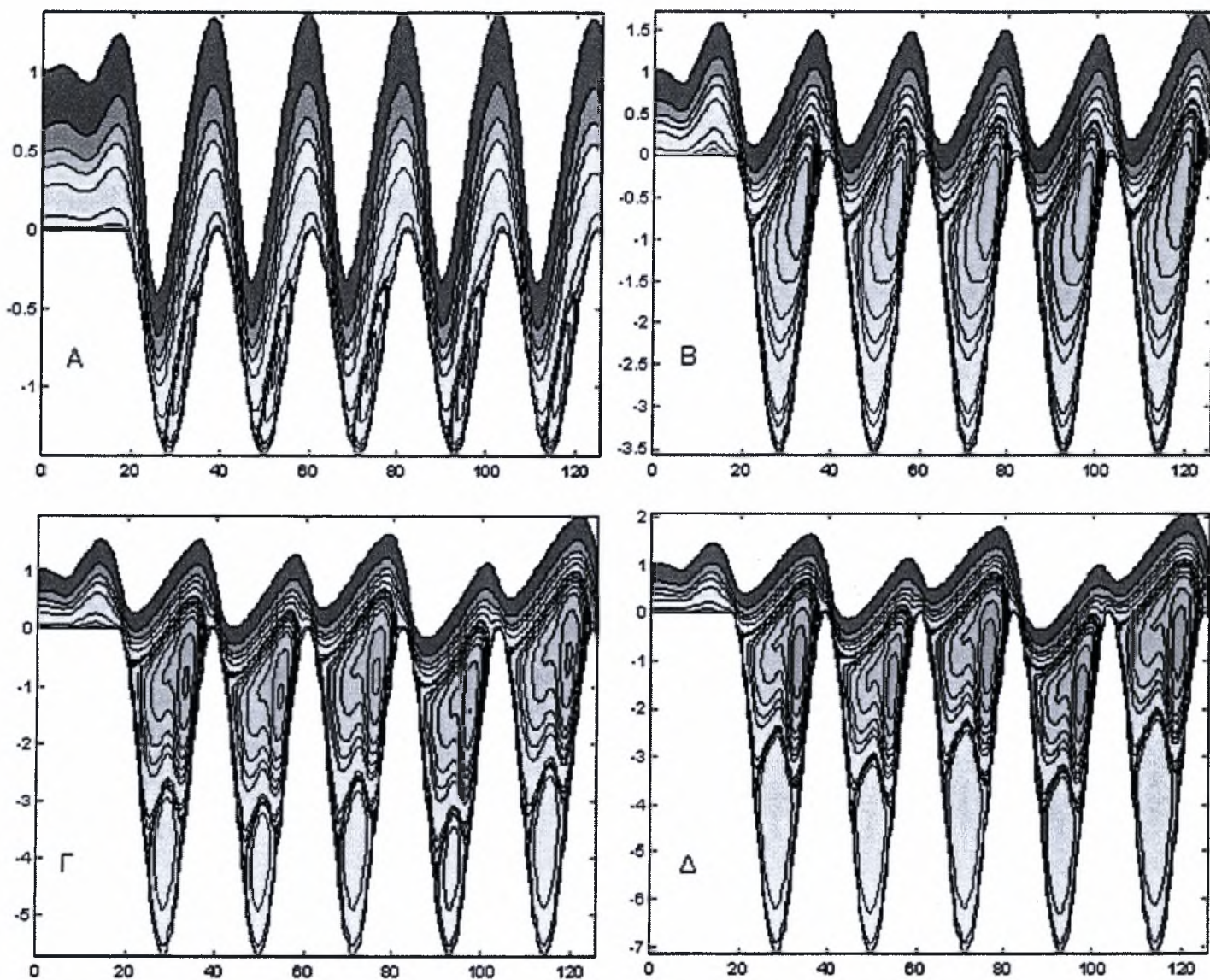


Σχήμα 5.2.5 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=40$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0072  
B. 0,0080 Γ. 0,0088 Δ. 0,010



## 5.2.3. Αριθμός Reynolds 100

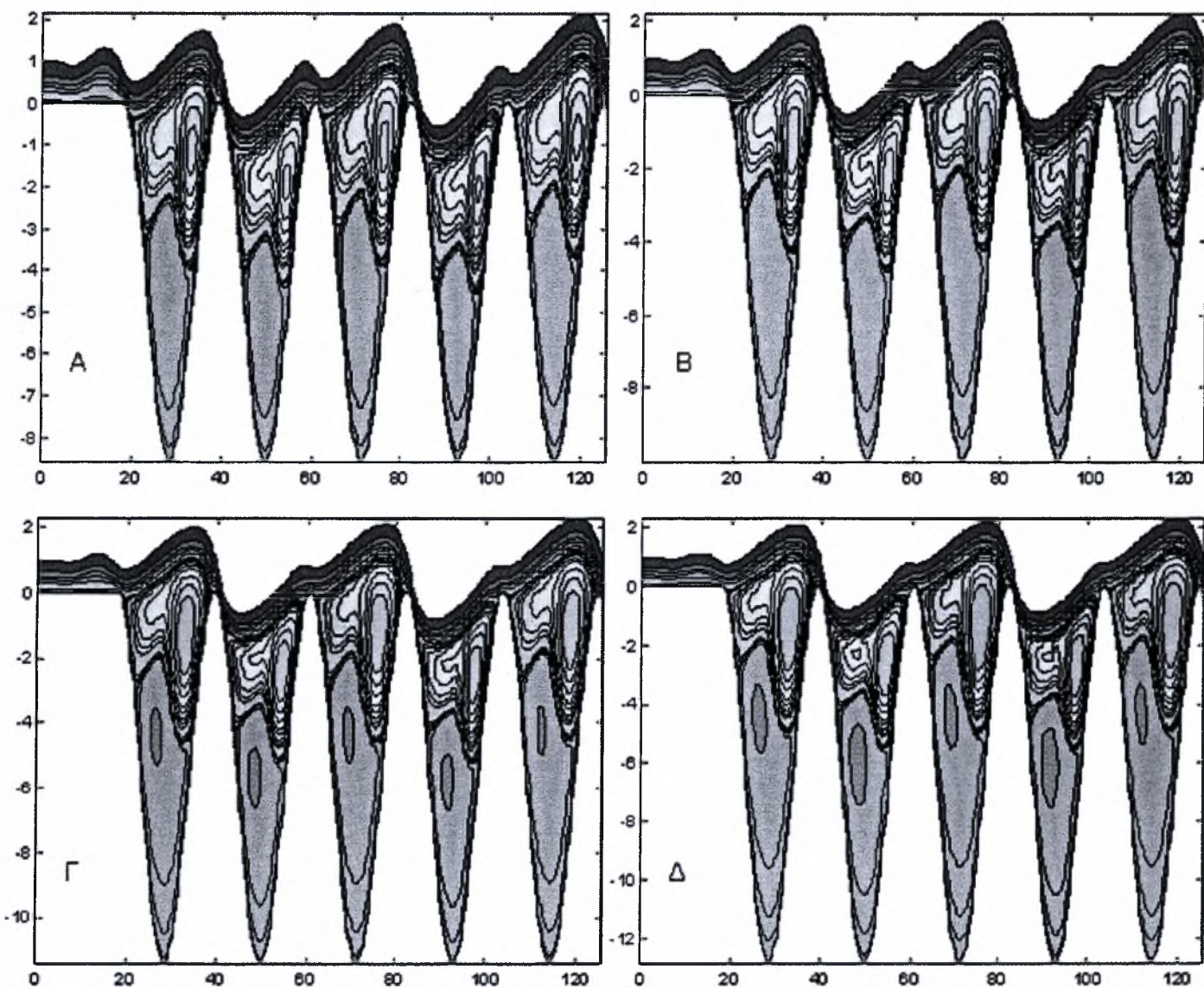
Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τα μορφολογικά χαρακτηριστικά της ροής υγρού υμένα για αριθμό Reynolds 100. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι δίνες σχηματίζονται σε βάθος τοιχώματος 0,8mm, η μορφή τους είναι επιμήκης και εμφανίζονται στην κατάντη πλευρά των κοιλοτήτων.



Σχήμα 5.2.7 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=100$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0008  
B. 0,002 Γ. 0,0032 Δ. 0,0040



Καθώς αυξάνουμε το βάθος του τοιχώματος η δίνη μεγαλώνει, αναπτύσσεται προς τα αριστερά και τείνει να καλύψει ολόκληρη την κοιλότητα. Για βάθος τοιχώματος 2mm οι δίνες αποκτούν ένα στρεβλό σχήμα, είναι επιμήκεις προς τα πάνω ενώ αφομοιώνουν το σχήμα της κοιλότητας προς τα κάτω. Αυξάνοντας και άλλο το βάθος του τοιχώματος η δίνη χωρίζεται σε δύο δίνες, μία στο κάτω μέρος της κοιλότητας και μία πάνω από αυτήν.

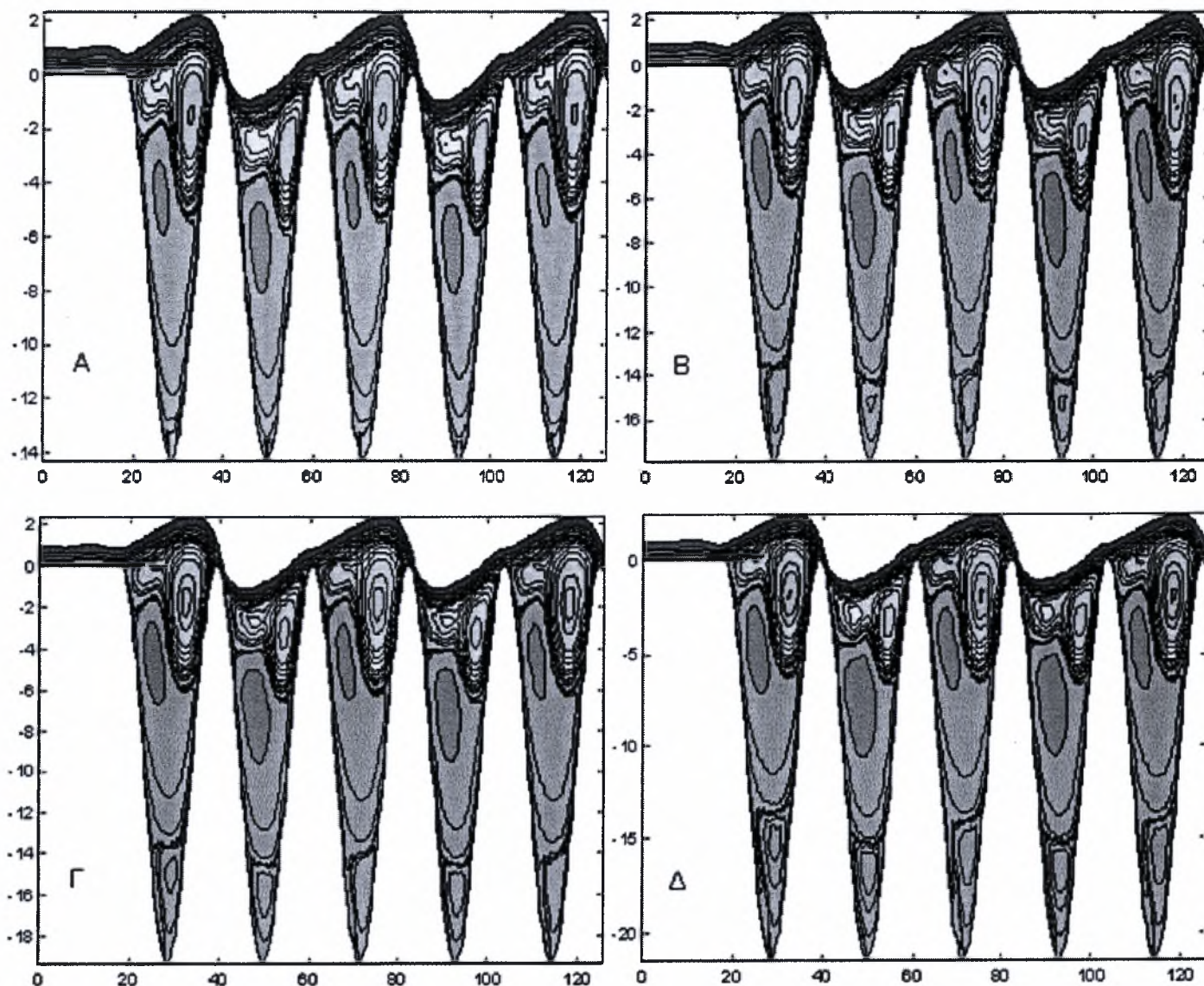


Σχήμα 5.2.8 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=100$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0048  
B. 0,0056    Γ. 0,0064    Δ. 0,0072



Η δίνη που βρίσκεται στο κάτω μέρος της κοιλότητας μεγαλώνει εις βάρος της δίνης που βρίσκεται από πάνω της και αποκτά ένα συμμετρικό σχήμα. Οι ταχύτητες στην πάνω δίνη είναι μεγαλύτερης τάξης σε σχέση με τις ταχύτητες στην κάτω. Δηλαδή, η κάτω δίνη σε μικρά βάθη μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Όταν το βάθος του τοιχώματος γίνει 0,0072mm παρατηρούμε ότι η πάνω δίνη διασπάται σε δύο μικρότερες. Μία επιμήκη, συμμετρική κατακόρυφη και μία μικρότερη, σχετικά συμμετρική, κυκλική δίνη. Η διάσπαση της δίνης δε συμβαίνει όμως σε όλες τις κοιλότητες. Σε άλλες κοιλότητες η δίνη εμφανίζεται χωρισμένη και σε άλλες όχι.



Σχήμα 5.2.9 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=100$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0080  
B. 0,010 Γ. 0,0108 Δ. 0,012

Σε μεγάλο βάθος τοιχώματος (πάνω από 5mm), γίνεται έντονα εμφανής μία περιοδικότητα της ροής ανά δύο μήκη κύματος του τοιχώματος. Η παρατήρηση αυτή ισχύει τόσο για την ελεύθερη επιφάνεια και τις δίνες εσωτερικά της ροής. Δηλαδή, η ροή εσωτερικά μιας κοιλότητας είναι ίδια με τη ροή στη μεθεπόμενη κοιλότητα. Το ίδιο συμβαίνει και με την ελεύθερη επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα η ροή στην πρώτη κοιλότητα είναι όμοια με τη ροή στην τρίτη και πέμπτη κοιλότητα. Ταυτόχρονα η ροή στη δεύτερη και στην τέταρτη κοιλότητα είναι επίσης όμοια. Το ίδιο συμβαίνει και με την ελεύθερη επιφάνεια. Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας είναι ανά δύο κοιλότητες όμοια.

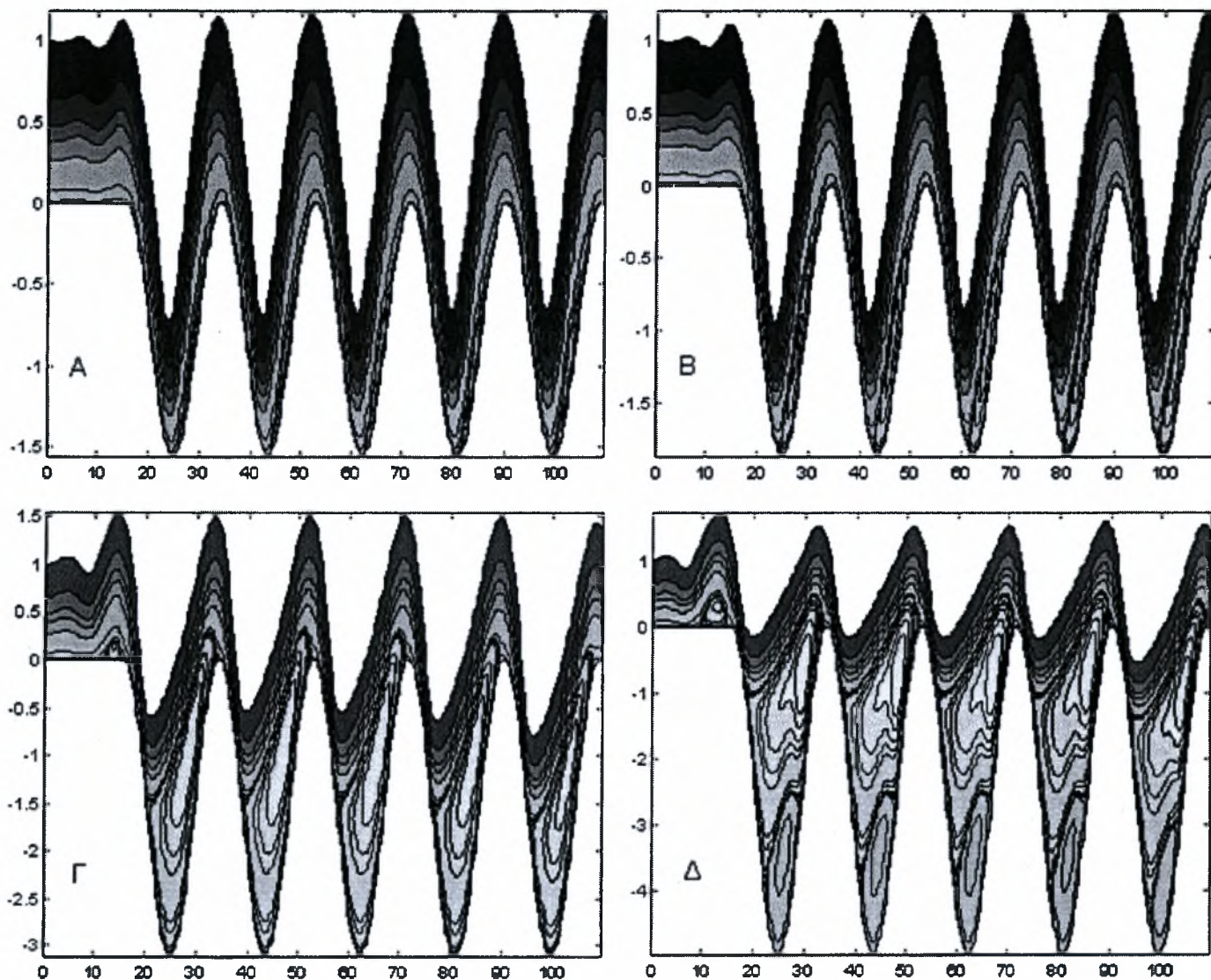
Περιοδικότητα η οποία έχει μήκος κύματος διπλάσιο του μήκους κύματος του τοιχώματος χαρακτηρίζεται ως υποαρμονική ή υποπερίοδος. Η εμφάνισή της συνεπάγεται διακλάδωση της βασικής λύσης του προβλήματος, η οποία αρχικά ακολουθούσε την πιστά την περίοδο του τοιχώματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η διακλάδωση λαμβάνει χώρα με την αύξηση του βάθους του τοιχώματος. Αξίζει να αναφερθεί ότι η ίδια περιοδικότητα εμφανίζονταν και στις προηγούμενες ενότητες σε μικρότερους αριθμούς Reynolds, αλλά δεν ήταν τόσο έντονα τα χαρακτηριστικά της ροής ώστε να γίνει άμεσα εμφανής.

#### 5.2.4. Αριθμός Reynolds 150

Στην περίπτωση που ο αριθμός Reynolds είναι 150 παρατηρούμε ότι οι δίνες σχηματίζονται σε μεγαλύτερο βάθος τοιχώματος, 1 mm, η μορφή τους είναι επιμήκης και πρωτοεμφανίζονται και πάλι κατάντη των κοιλοτήτων. Καθώς αυξάνουμε το βάθος του τοιχώματος η δίνη μεγαλώνει, αναπτύσσεται προς τα αριστερά και τείνει να καλύψει ολόκληρη την λακκούβα. Για βάθος τοιχώματος 2mm οι δίνες αποκτούν ένα στρεβλό σχήμα, είναι επιμήκεις προς τα πάνω ενώ αφομοιώνουν το σχήμα της κοιλότητας προς τα κάτω. Αυξάνοντας και άλλο το βάθος του τοιχώματος η δίνη χωρίζεται σε δύο δίνες, μία στο κάτω μέρος της κοιλότητας και μία πάνω από αυτήν. Η δίνη που βρίσκεται στο κάτω μέρος της κοιλότητας μεγαλώνει εις βάρος της δίνης που βρίσκεται από πάνω της και αποκτά ένα συμμετρικό σχήμα. Οι ταχύτητες στην πάνω δίνη είναι μεγαλύτερης τάξης σε



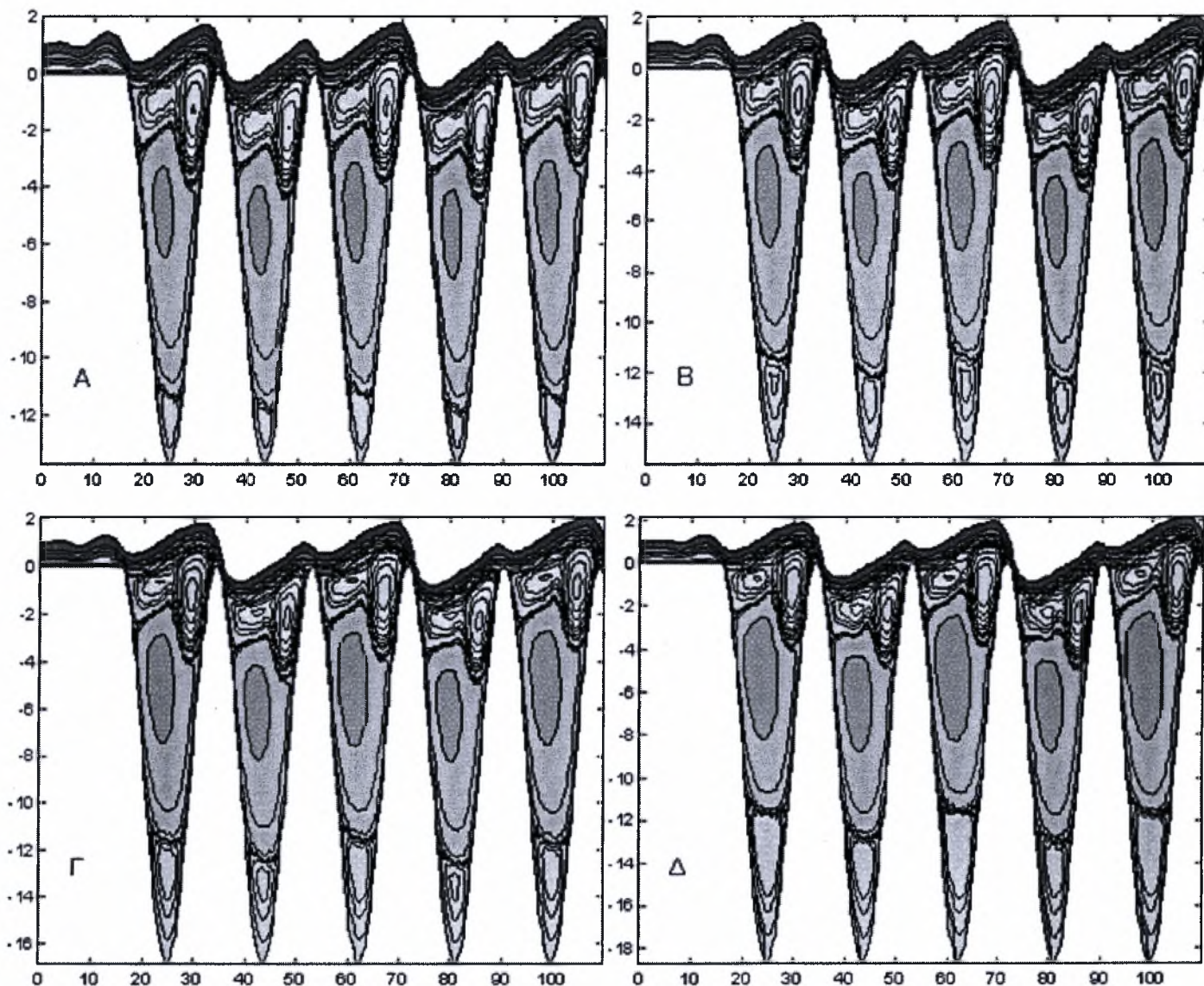
σχέση με τις ταχύτητες στην κάτω. Αυτό θα αποδειχθεί σε επόμενη ενότητα. Δηλαδή, η πάνω δίνη είναι πολύ πιο ισχυρή από την κάτω δίνη (η κάτω δίνη σε μικρά βάθη μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα).



Σχήμα 5.2.1 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=150$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0010  
B. 0,0012     Γ. 0,0020     Δ. 0,0032

Σε βάθος τοιχώματος πάνω από 8,8mm, παρατηρώντας την ελεύθερη επιφάνεια και τις δίνες εσωτερικά της ροής προκύπτει μία περιοδικότητα της ροής με περίοδο ίση με δύο μήκη κύματος. Δηλαδή, η ροή εσωτερικά μιας κοιλότητας είναι ίδια με τη ροή στη μεθεπόμενη κοιλότητα. Το ίδιο συμβαίνει και με την ελεύθερη επιφάνεια. Τη δομή αυτή

της ροής την είδαμε και στις προηγούμενες παραγράφους για διαφορετικούς αριθμούς Reynolds. Άρα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η υποπεριοδική δομή αποτελεί ένα κεντρικό χαρακτηριστικό της ροής πάνω από κυματισμούς μεγάλου βάθους για ολόκληρο το εύρος αριθμών Reynolds μεταξύ των τιμών 10 έως 200.



Σχήμα 5.2.1 Αναπαράσταση της ροής για  $Re=150$  και βάθη τοιχώματος: A. 0,0088  
B. 0,010 Γ. 0,0108 Δ. 0,012

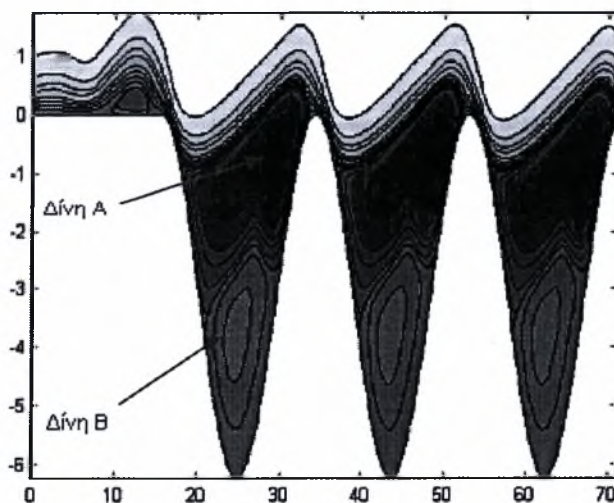


### 5.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται και αναλύονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από τον κώδικα για συγκεκριμένες συνθήκες ροής. Όλα τα αποτελέσματα αναφέρονται σε ροή υγρού υμένα σε ημιτονοειδώς διαμορφωμένο, κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας 10 μοιρών. Το ρευστό ρέει χωρίς κάποια διαταραχή στην είσοδο και εξετάζεται η επίδραση που έχουν ο αριθμός Reynolds και το βάθος του τοιχώματος στη δομή της ροής. Τα δύο βασικά χαρακτηριστικά στη ροή ενός υμένα που εξετάζονται είναι η εμφάνιση δινών εσωτερικά της ροής και η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

#### 5.3.1. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΔΙΝΩΝ

Στη συγκεκριμένη ενότητα εξετάζονται τα χαρακτηριστικά των δύο δινών που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Όπως αναμένεται, οι δύο δίνες είναι αντίρροπες, καθώς η πρώτη παίρνει ενέργεια από τη διάτμηση του υπερκείμενου ελεύθερου υμένα υγρού ενώ η δεύτερη παίρνει ενέργεια από την περιστροφή της πρώτης. Αρχικά σε μικρό σχετικά βάθος τοιχώματος, 0,0003-0,0006 m, σχηματίζεται η δίνη A και έπειτα σχηματίζεται και η δίνη B σε μεγαλύτερο βάθος τοιχώματος. Πρώτα αναλύονται τα χαρακτηριστικά της δίνης A.



Σχήμα 5.3. Αναπαράσταση των δύο βασικών δινών στη δομή της ροής



### 5.3.2. Δίνη A

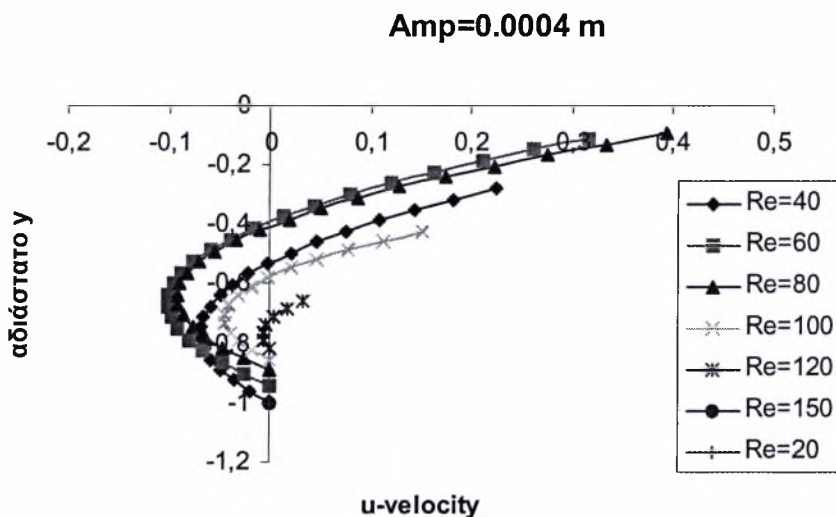
Για τη πλήρη περιγραφή των χαρακτηριστικών της δίνης A θα γίνει λεπτομερής ανάλυση σε τρία σημεία που αφορούν τη δίνη: πότε εμφανίζεται, ποια μεγέθη τη χαρακτηρίζουν (ταχύτητες εσωτερικά της δίνης, μέγεθος της δίνης, ένταση της δίνης) και ποια είναι η μορφή της.

#### ✓ Εμφάνιση δίνης ανακυκλοφορίας

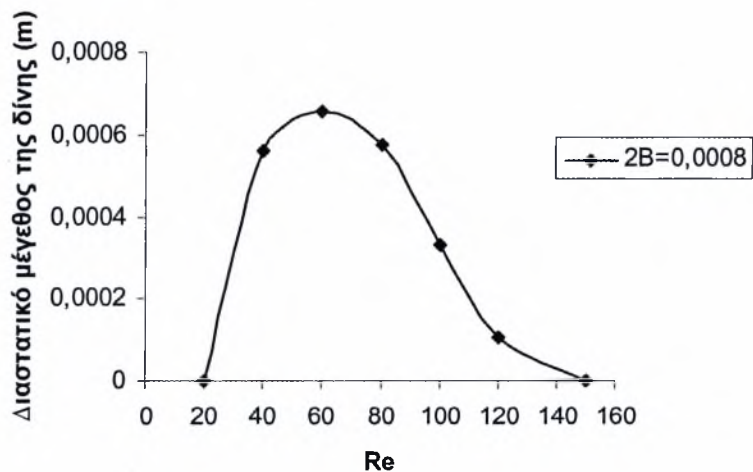
Αρχικά η δίνη A σχηματίζεται, σε μικρό σχετικά βάθος τοιχώματος, στον πάτο της κοιλότητας. Αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος, η δίνη αρχίζει σταδιακά να ανεβαίνει προς την ελεύθερη επιφάνεια. Ποσοτικές πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά της δίνης μπορούν να ληφθούν από την κατανομή της  $u$  συνιστώσας της ταχύτητας κατά την  $y$  διεύθυνση στον άξονα συμμετρίας της δίνης. Αποτελέσματα για διάφορους  $Re$  παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.3.1. Επίσης, το μέγεθος της δίνης κατά την  $y$  διεύθυνση μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα με παρατήρηση των ροϊκών γραμμών, και αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.3.2. Τέλος, με βάση τις κατανομές της  $u$  ταχύτητας μπορεί να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή, η οποία θεωρείται ενδεικτική της ισχύος της δίνης. Τέτοια αποτελέσματα περιέχονται στο Σχήμα 5.3.3. Όσον αφορά τους άξονες των σχημάτων 5.3.1 και 5.3.3 οι ταχύτητες  $u$  και  $v$  είναι αδιάστατες ως προς τη μέση ταχύτητα Nusselt και ο άξονας  $y$  είναι αδιαστατοποιημένος ως προς το βάθος του τοιχώματος (στο Σχήμα 5.3.2, η  $y$  συνιστώσα είναι διαστατική σε  $m$ ).

Από τα Σχήματα 5.3.1, 5.3.2 και 5.3.3 προκύπτει ότι σε μικρό βάθος τοιχώματος η δίνη έχει το μεγαλύτερο μέγεθος για αριθμό Reynolds μεταξύ των τιμών 60 και 80. Στην περιοχή αυτή τιμών, η δίνη έχει ήδη σχηματιστεί και το μέγεθός της καθώς και οι ταχύτητες εσωτερικά αυτής είναι αρκετά σημαντικές, σε αντίθεση με άλλους αριθμούς Reynolds όπου η δίνη ή δεν έχει σχηματιστεί (περίπτωση  $Re=20$  και 150) ή είναι πολύ μικρή ( $Re=120$ ). Από τα Σχήματα 5.3.2 και 5.3.3 παρατηρούμε ότι, για δεδομένο μικρό βάθος τοιχώματος, σε μικρούς αριθμούς Reynolds δεν εμφανίζεται δίνη, αυξάνοντας τον αριθμό Reynolds μεγαλώνει η δίνη εμφανίζει μέγιστο για Reynolds 60 και συνεχίζοντας την αύξηση του αριθμού Reynolds η δίνη συρρικνώνεται πάλι. Έτσι, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι για αριθμό Reynolds μεταξύ κάποιου πεδίου τιμών η δίνη σχηματίζεται σε μικρότερο βάθος τοιχώματος. Επίσης παρατηρούμε ότι μεταξύ αυτών των τιμών

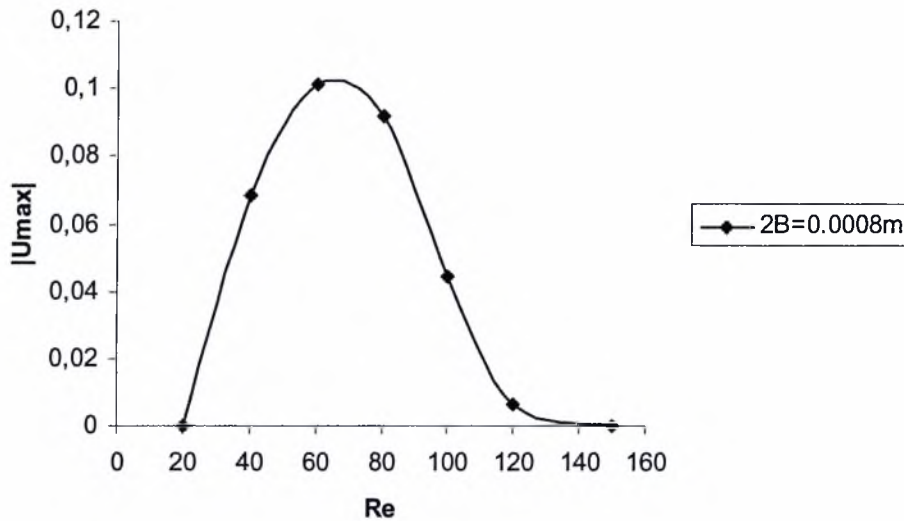
Reynolds το μέγεθος της δίνης, η μέγιστη ταχύτητα εσωτερικά της δίνης αλλά και όλες οι ταχύτητες εσωτερικά της δίνης είναι μέγιστες.



Σχήμα 5.3.1. Επίδραση αριθμού Reynolds στην ταχύτητα  $u$  της δίνης

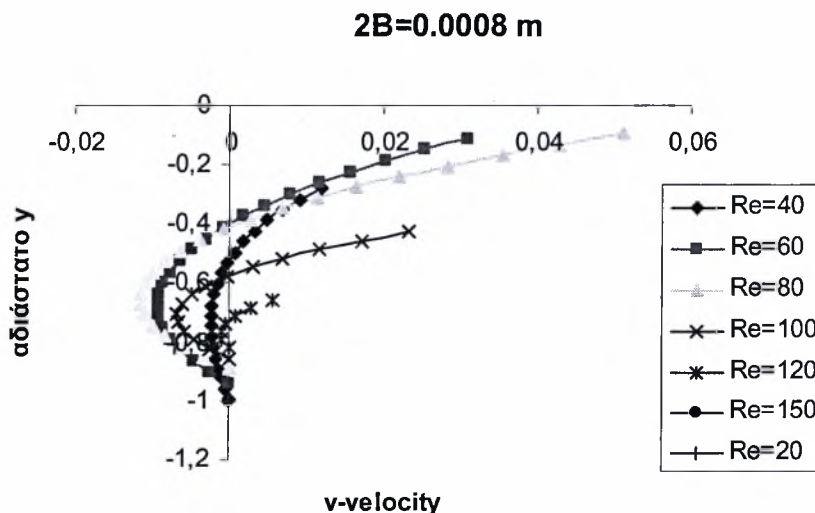


Σχήμα 5.3.2. Επίδραση αριθμού Reynolds στο μέγεθος της δίνης



Σχήμα 5.3.3. Επίδραση αριθμού Reynolds στην μέγιστη ταχύτητα  $u$  της δίνης

Το Σχήμα 5.3.4 περιγράφει την επίδραση του αριθμού Reynolds στην ταχύτητα  $v$ . Η ταχύτητα  $v$  εκφράζει την ασυμμετρία της δίνης, καθώς στον κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μίας εντελώς συμμετρικής δίνης περιμένουμε η συνιστώσα  $v$  να είναι μηδέν, δηλαδή η ταχύτητα να είναι παράλληλη με την μέση κλίση του τοιχώματος.

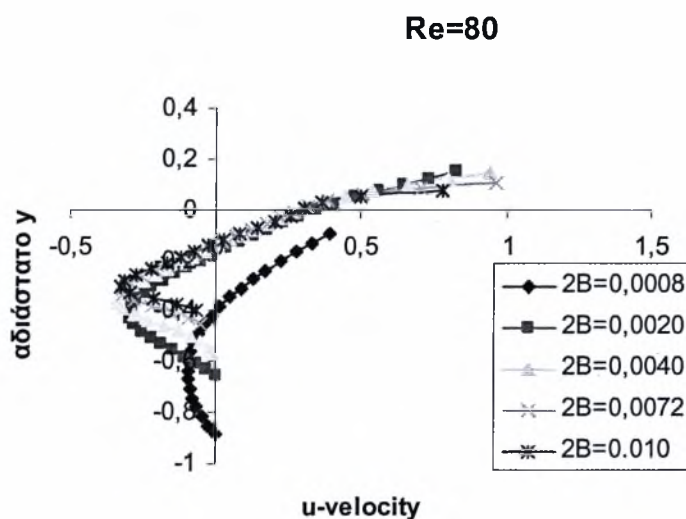


Σχήμα 5.3.4. Επίδραση αριθμού Reynolds στην ταχύτητα  $v$  της δίνης

#### ✓ Χαρακτηριστικά της πλήρως σχηματισμένης δίνης A

Τα χαρακτηριστικά εκείνα που περιγράφουν πλήρως τη δίνη και αναλύονται παρακάτω είναι η κατακόρυφη και η οριζόντια θέση της, η φορά περιστροφής της δίνης, η ογκομετρική παροχή της δίνης, καθώς και οι ταχύτητες εσωτερικά της δίνης.

Στο Σχήμα 5.3.5 παριστάνεται η  $u$  συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας της δίνης για τον ίδιο αριθμό Reynolds ( $Re=80$ ) αλλά διαφορετικά βάθη τοιχώματος. Το κέντρο της δίνης προσδιορίζεται από τη συνθήκη  $u=0$ , ενώ το αρνητικό ακρότατο της  $u$  αντιστοιχεί στις εντονότερες συνθήκες ροής του κάτω τμήματος της δίνης. Με βάση τις πληροφορίες του Σχήματος 5.3.5, συμπεραίνουμε ότι αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος, το κέντρο της δίνης ‘ανεβαίνει’ προς την ελεύθερη επιφάνεια, ενώ ταυτόχρονα μειώνεται το ‘ύψος’ της δίνης. Παρατηρούμε με εξαίρεση την περίπτωση που το βάθος τοιχώματος είναι 0,8 mm -σε μικρό βάθος τοιχώματος η δίνη δεν έχει προλάβει να σχηματιστεί- ότι τα αποτελέσματά μας δείχνουν ομαδοποιημένα και οι αλλαγές είναι μικρές και σταδιακές. Η μεταβολή της μέγιστης ταχύτητας της δίνης είναι αμελητέα ενώ η μετατόπιση του κέντρου της δίνης προς τα πάνω αρκετά σημαντική.



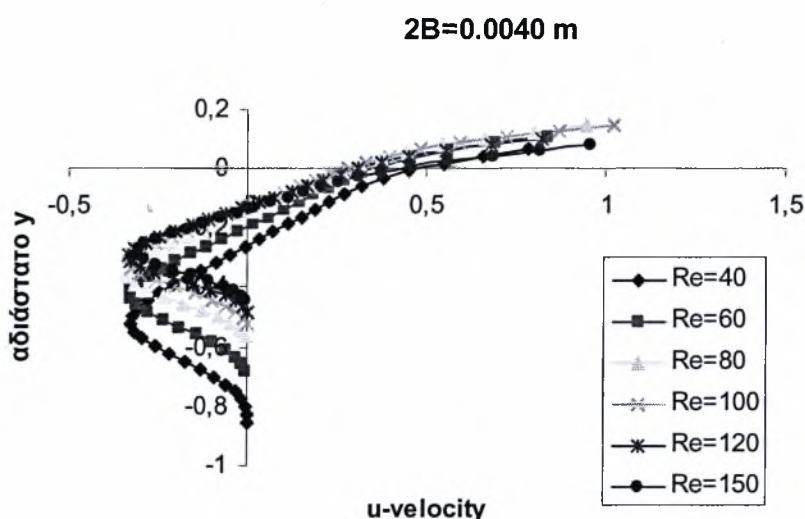
Σχήμα 5.3.5. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στην ταχύτητα  $u$  της δίνης

Επιπλέον παρατηρούμε ότι η δίνη περιστρέφεται δεξιόστροφα. Οι ταχύτητες πάνω από το κέντρο της δίνης είναι θετικές και κάτω από το κέντρο της αρνητικές. Οι θετικές ταχύτητες της δίνης, δηλαδή οι ταχύτητες που βρίσκονται πάνω από το κέντρο της δίνης είναι αρκετά μεγαλύτερες (έως και 2 φορές) από τις αντίστοιχες αρνητικές.

Επίσης οι ταχύτητες στο κάτω μέρος της δίνης παρουσιάζουν παραβολική κατανομή, ενώ οι ταχύτητες πάνω από το κέντρο της δίνης είναι συνεχώς αυξανόμενες.

Συγκεκριμένα, συνεχίζουν να αυξάνονται μέχρι το σημείο όπου αποχωρίζονται τη δίνη και ακολουθούν την πορεία του ελεύθερου υμένα.

Στη συνέχεια διατηρείται σταθερό το βάθος του τοιχώματος και εξετάζεται η επίδραση του αριθμού  $Re$ . Στα Σχήματα 5.3.6 και 5.3.7 απεικονίζονται οι  $u$  και  $v$  συνιστώσες της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της κοιλότητας για ένα μέσο βάθος τοιχώματος  $2B=0,004$  m. Παρατηρούμε ότι, αυξάνοντας τον  $Re$ , το κέντρο της δίνης κινείται προς την ελεύθερη επιφάνεια και μειώνεται το ύψος της δίνης (σχ. 5.3.6), ενώ οι ταχύτητες εσωτερικά της δίνης μεταβάλλονται ελάχιστα.



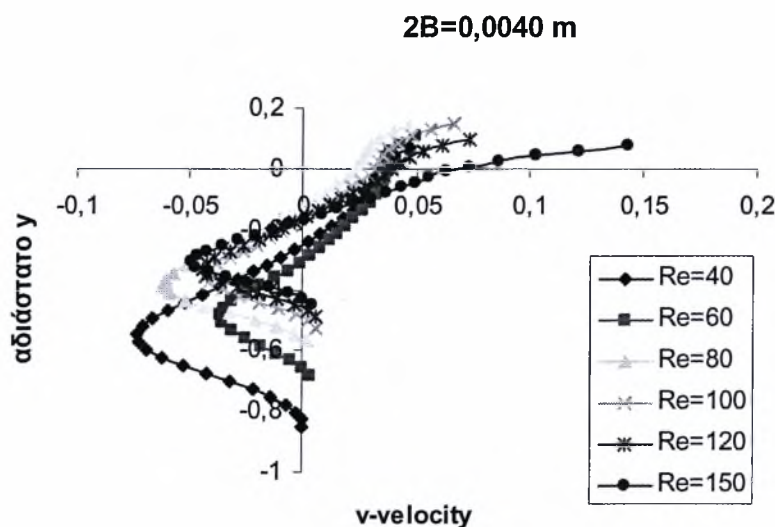
Σχήμα 5.3.6 Επίδραση του αριθμού Reynolds στην ταχύτητα  $u$  της δίνης

Όσο αναφορά τη συμμετρία της δίνης, στο σχήμα 5.3.7 φαίνεται ότι η δίνη παραμένει ασύμμετρη και οι μεταβολές στην  $v$  ταχύτητα δεν παρουσιάζουν μονοτονική τάση. Τα αποτελέσματα δεν δείχνουν να είναι ομαδοποιημένα και η ταχύτητα  $v$  αυξομειώνεται τρεις φορές με τη μεταβολή του αριθμού Reynolds κατά 6 φορές.

Μία παράμετρος που χαρακτηρίζει την ασυμμετρία της δίνης είναι η θέση του κέντρου της. Το κέντρο της δίνης προσδιορίζεται εύκολα, είτε από τη συνθήκη  $u=v=0$ , είτε από τη μεγιστοποίηση της απόλυτης τιμής της ροϊκής συνάρτησης (βλ. παρακάτω). Στο Σχήμα 5.3.8 παρουσιάζεται η εξάρτηση της οριζόντιας θέσης του κέντρου της δίνης από τον  $Re$  για διάφορα βάθη τοιχώματος. Η συντεταγμένη  $x$  λαμβάνει την τιμή μηδέν

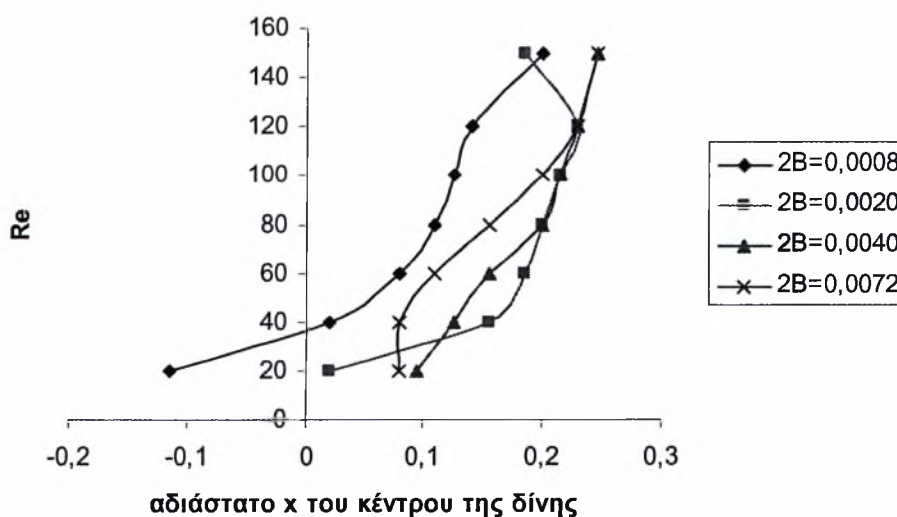


στον άξονα συμμετρίας της κοιλότητας και είναι αδιαστατοποιημένη ως προς το μήκος κύματος του τοιχώματος.



Σχήμα 5.3.7. Επίδραση του αριθμού Reynolds στην ταχύτητα  $v$  της δίνης

Παρατηρούμε ότι σχεδόν σε όλες τις συνθήκες η δίνη βρίσκεται στο κατάντη μέρος της κοιλότητας, αλλά μειώνοντας τον αριθμό Reynolds μετακινείται προς το κέντρο. Οι μεταβολές αυτές είναι αρκετά σημαντικές αν λάβουμε υπόψη ότι μία μεταβολή στο διάγραμμα κατά 0,1 αντιστοιχεί σε μετατόπιση του κέντρου της δίνης κατά 10% σε σχέση με το μήκος κύματος του τοιχώματος.



Σχήμα 5.3.8. Επίδραση αριθμού Reynolds στην οριζόντια θέση της δίνης

Το χαρακτηριστικότερο ίσως μέγεθος τη δίνης είναι η ογκομετρική παροχή του υγρού κατά την ανακυκλοφορία της. Η ογκομετρική παροχή μεταξύ δύο σημείων ενός ροϊκού πεδίου ισούται με τη διαφορά των τιμών της ροϊκής συνάρτησης μεταξύ των δύο σημείων. Έτσι, η ογκομετρική παροχή μιας δίνης μπορεί να υπολογιστεί αφαιρώντας την τιμή της ροϊκής συνάρτησης στο κέντρο της δίνης από την τιμή της σε ένα από τα δύο κατακόρυφα άκρα της. Η απόδειξη της διαδικασίας αυτής δίνεται παρακάτω.

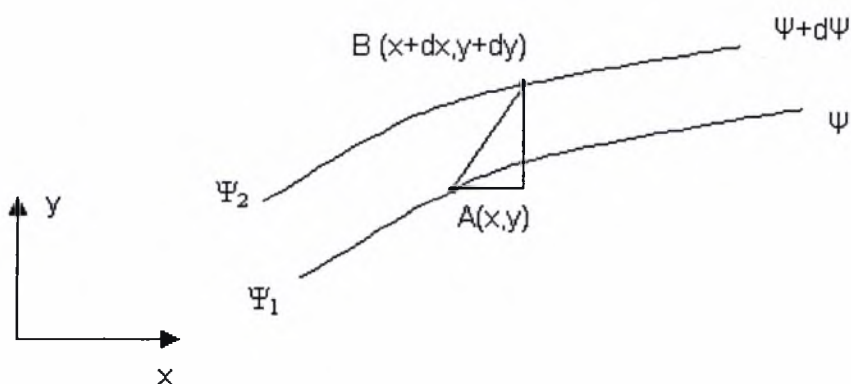
Γνωρίζουμε ότι για διδιάστατες επίπεδες ροές, μπορούμε να ορίσουμε τη ροϊκή συνάρτηση,  $\Psi$ , σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_y$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\Psi_x$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται ταυτοτικά η εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



Σχήμα 5.3.9. Γραφική αναπαράσταση δύο ροϊκών γραμμών

Θεωρούμε τη διδιάστατη ροή του Σχήματος 5.3.9, όπου όλα τα μεγέθη παραμένουν αναλλοίωτα κατά τη  $z$  διεύθυνση (κάθετα στο σχήμα). Στον υπολογισμό ονομάζουμε  $b$  το εύρος του ροϊκού πεδίου που λαμβάνουμε υπόψη κατά τη  $z$  διεύθυνση, και το οποίο



εύρος αποτελεί απλά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα στις εξισώσεις. Για τα τυχαία σημεία A και B που απέχουν απειροστά μεταξύ τους, η ογκομετρική παροχή  $d\dot{V}$  διαμέσου νοητής καμπύλης που ενώνει τα σημεία υπολογίζεται από τη σχέση:

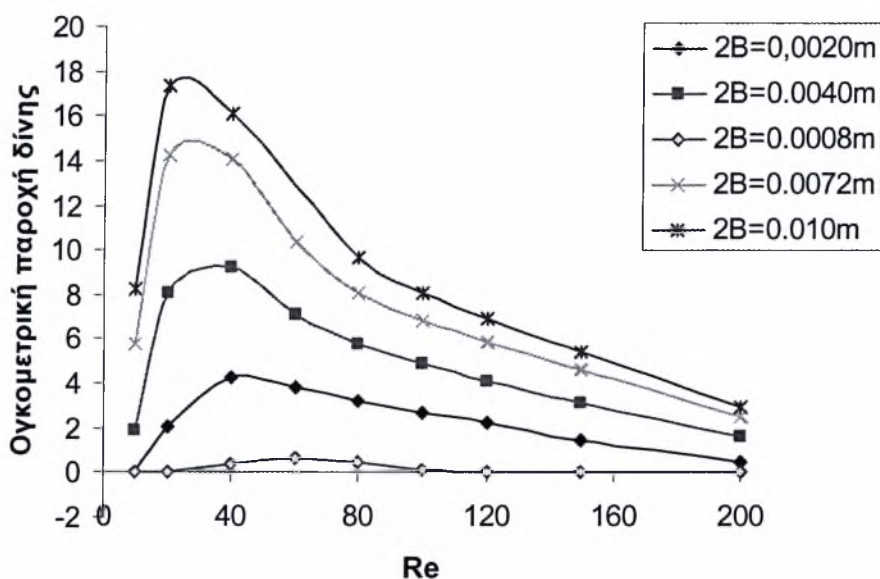
$$d\dot{V} = (b \cdot dx) \cdot (-v) + (b \cdot dy) \cdot u = (b \cdot dx) \cdot \Psi_x + (b \cdot dy) \cdot \Psi_y = b \cdot d\Psi$$

Θεωρώντας σημεία σε πεπερασμένη απόσταση μεταξύ τους, η ογκομετρική παροχή υπολογίζεται αμέσως με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης και δίνει:

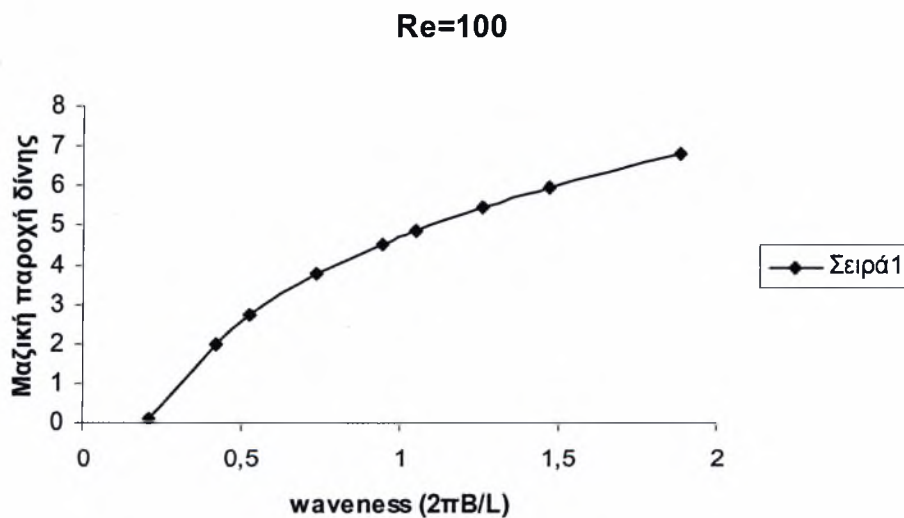
$$\dot{V}_{1,2} = b \cdot (\Psi_2 - \Psi_1)$$

Με βάση την παραπάνω διαδικασία, υπολογίζουμε την ογκομετρική παροχή της δίνης A, και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.3.10 και 5.3.11. Το Σχήμα 5.3.10 δείχνει την εξάρτηση της παροχής από τον Re, με παράμετρο το βάθος της κοιλότητας, ενώ το Σχήμα 5.3.11 παρουσιάζει άμεσα την εξάρτηση της παροχής από το βάθος για σταθερό Re. Από το Σχήμα 5.3.11 είναι εμφανές ότι αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος αυξάνεται η ογκομετρική παροχή της δίνης. Σε μικρό βάθος τοιχώματος η ογκομετρική παροχή είναι πολύ μικρή, αλλά στη συνέχεια αυξάνει έως και κατά 1-2 τάξεις μεγέθους.

Η εξάρτηση της ογκομετρικής παροχής της δίνης από τον Re, που φαίνεται στο Σχήμα 5.3.10, είναι περισσότερο ενδιαφέρουσα. Ξεκινώντας από μικρό αριθμό Reynolds, η παροχή αυξάνεται, παρουσιάζει μία μέγιστη τιμή και έπειτα μειώνεται με περαιτέρω αύξηση του αριθμού Reynolds. Η συμπεριφορά αυτή επαναλαμβάνεται ποιοτικά απαράλλαχτη για οποιοδήποτε βάθος τοιχώματος. Η κύρια ποσοτική διαφοροποίηση συνίσταται στη σταδιακή μείωση της τιμής του Re όπου παρουσιάζεται η μέγιστη παροχή, καθώς αυξάνεται το βάθος του τοιχώματος.



Σχήμα 5.3.10. Επίδραση του αριθμού Reynolds και του βάθους του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή της δίνης

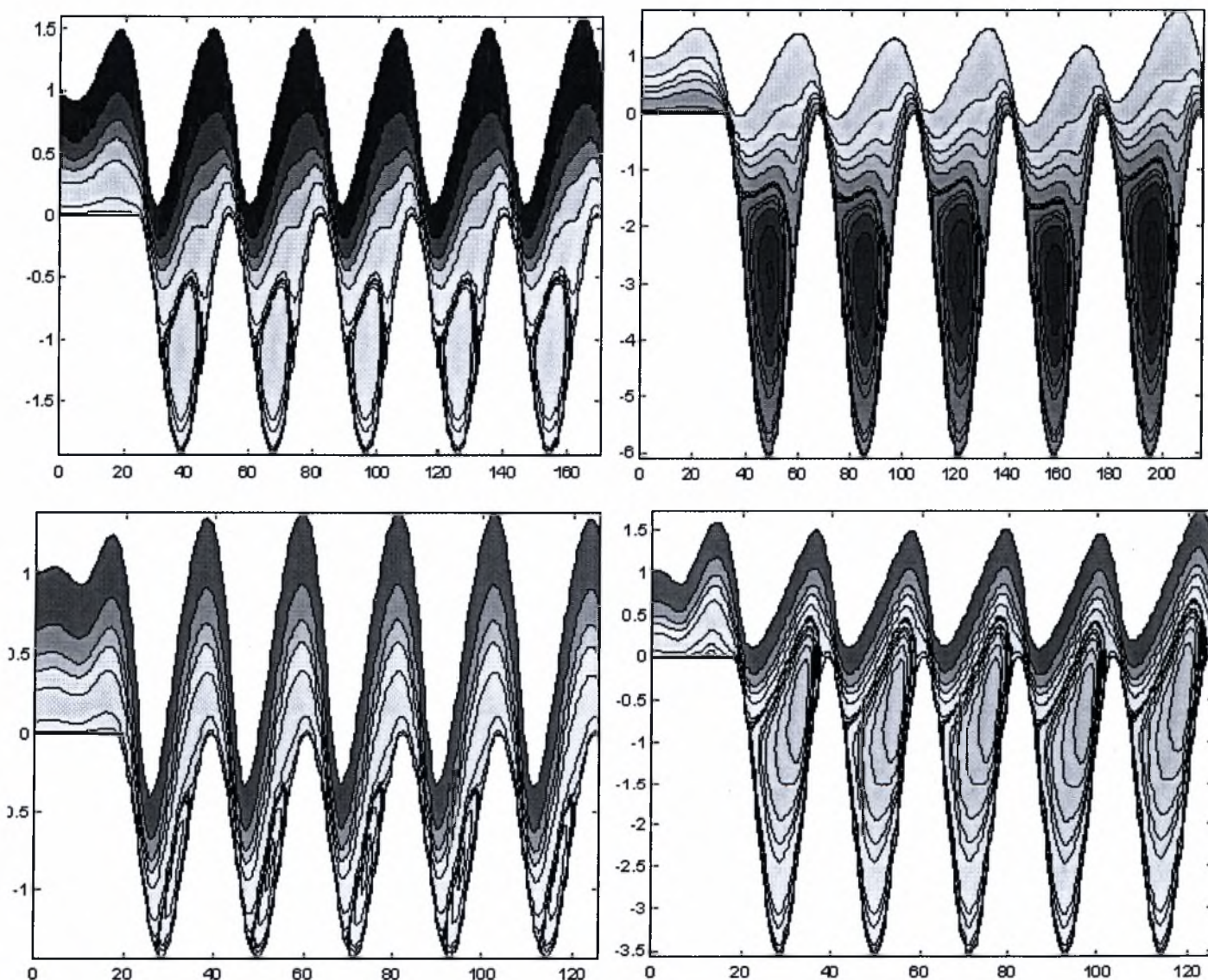


Σχήμα 5.3.11. Επίδραση του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή της δίνης

#### ✓ Η μορφή της δίνης

Στο σημείο αυτό θα αναδειχθούν κάποια σχήματα με τη μορφή που έχει η δίνη Α σε διαφορετικές συνθήκες ροής. Η ανάδειξη τεσσάρων μόνο σχημάτων όπου η δίνη εμφανίζει τελείως διαφορετική μορφή αναδεικνύει την ποικιλία των μορφολογικών της

χαρακτηριστικών. Ειδικότερα, σε ορισμένες συνθήκες η δίνη είναι συμμετρική. Αλλού φαίνεται να επικάθεται στο κατάντη τμήμα της κοιλότητας, γεγονός που υποδεικνύει ότι η περιοχή ανακυκλοφορίας πιθανόν να προκαλείται αρχικά από την αδυναμία αντιστροφής της ροής στο βάθος της κοιλότητας. Σε άλλες συνθήκες, η δίνη αποκτά ένα στρεβλό, τραβηγμένο προς τα δεξιά και πάνω, σχήμα, και εμφανίζεται ως να έλκεται από τον ελεύθερο υμένα που προσπαθεί να την αποκολλήσει από την κοιλότητα.



Σχήμα 5.3.12. Επίδραση του αριθμού Reynolds και του βάθους του τοιχώματος στα μορφολογικά χαρακτηριστικά της δίνης

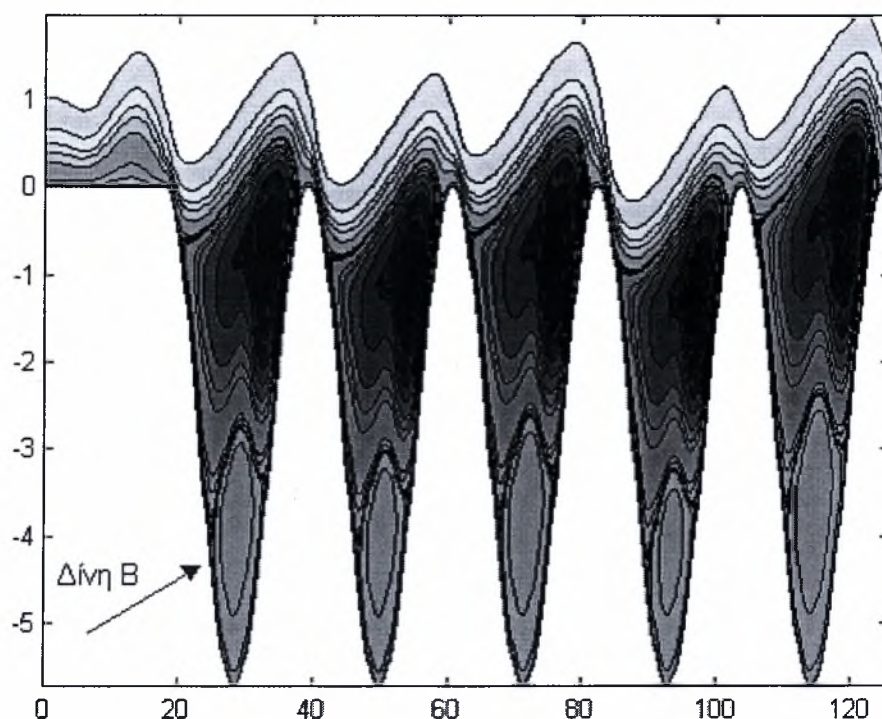


### 5.3.3. Δίνη B

Για τη πλήρη περιγραφή της δίνης B θα γίνει παρόμοια ανάλυση με την αντίστοιχη που έγινε για τη δίνη A. Συγκεκριμένα θα γίνει λεπτομερής ανάλυση σε τρία βασικά σημεία: πότε εμφανίζεται η δίνη, ποια μεγέθη χαρακτηρίζουν τη δίνη και ποια είναι η μορφή της δίνης.

✓ Εμφάνιση δίνης ανακυκλοφορίας

Η δίνη B σχηματίζεται σε σχετικά μεγάλο βάθος τοιχώματος μεταξύ των τιμών: 0,0016-0,0040 m, ανάλογα με την τιμή του αριθμού Reynolds. Η δίνη σχηματίζεται στον



Σχήμα 5.3.13. Γραφική αναπαράσταση της θέσης της δίνης B εσωτερικά της ροής

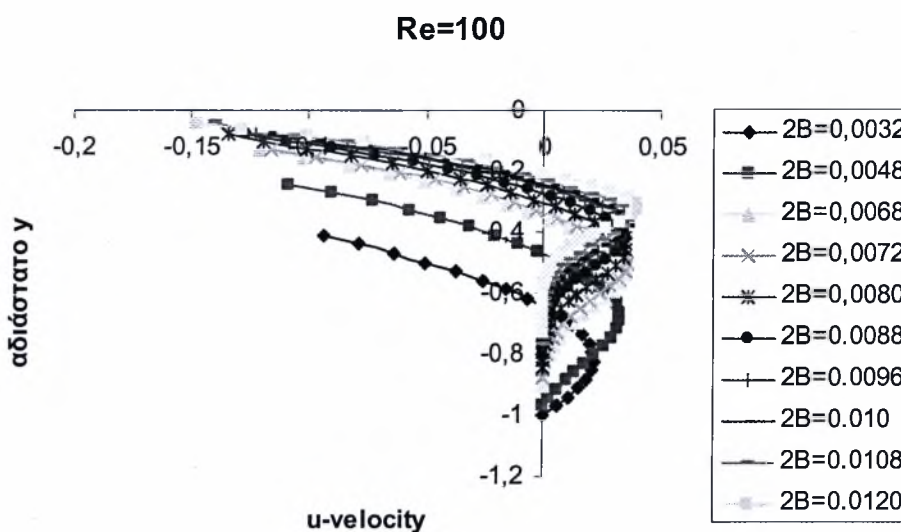
πάτο της κοιλότητας και είναι σχετικά συμμετρική.

✓ Χαρακτηριστικά της δίνης B

Τα χαρακτηριστικά εκείνα που περιγράφουν πλήρως τη δίνη και αναλύονται παρακάτω είναι η κατακόρυφη και η οριζόντια θέση της, η φορά περιστροφής της δίνης, η ογκομετρική παροχή της δίνης, καθώς και οι ταχύτητες εσωτερικά της δίνης.

Η δίνη όπως είπαμε νωρίτερα σχηματίζεται στον πάτο της κοιλότητας. Αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος, εκτός από τις περιπτώσεις που ο αριθμός Reynolds είναι σχετικά μικρός ( $Re < 60$ ), η δίνη ανεβαίνει προς την ελεύθερη επιφάνεια, όπως και στην περίπτωση της δίνης A.

Οι μεταβολές στην κατανομή της ταχύτητας  $u$  με τη μεταβολή του βάθους τοιχώματος είναι μικρές και σταδιακές. Πιο συγκεκριμένα αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος οι ταχύτητες  $u$  μεγαλώνουν και το κέντρο της δίνης μετατοπίζεται προς την ελεύθερη επιφάνεια.

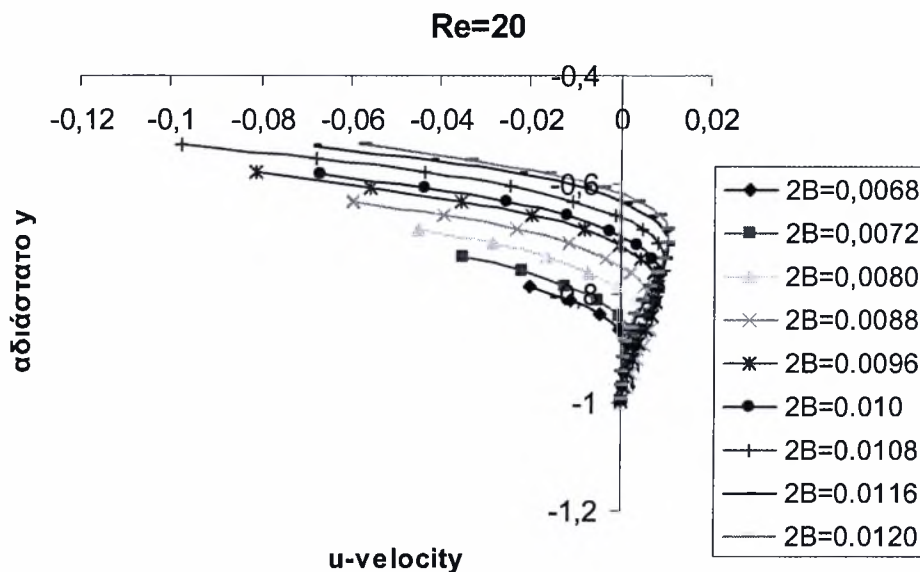


Σχήμα 5.3.14. Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στα χαρακτηριστικά της δίνης

Στο Σχήμα 5.3.15 όμως βλέπουμε ότι διαφορετικά πράγματα συμβαίνουν στην περίπτωση που ο αριθμός Reynolds είναι μικρός. Διατηρώντας τον αριθμό Reynolds σε μικρές τιμές, για  $Re=10, 20, 40$ , και αλλάζοντας τώρα μόνο το βάθος του τοιχώματος παρατηρούμε ότι η δίνη μεγαλώνει, οι ταχύτητες  $u$  της δίνης αυξάνονται και παράλληλα η δίνη απλώνεται προς τα πάνω. Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται στο Σχήμα 5.3.15 και ισχύουν μόνο στην περίπτωση που ο αριθμός Reynolds είναι μικρός, καθώς σε μεγαλύτερο αριθμό Reynolds η δίνη ανεβαίνει προς τα πάνω και σχηματίζεται μία τρίτη δίνη στον πάτο στη θέση της προηγούμενης.

Όσο αναφορά τη φορά των ταχυτήτων, παρατηρούμε ότι η δίνη  $B$  κινείται αριστερόστροφα. Οι ταχύτητες πάνω από το κέντρο της δίνης είναι αρνητικές ενώ κάτω

από το κέντρο της δίνης θετικές. Και σε αυτήν την περίπτωση, όπως και στη δίνη A, οι ταχύτητες πάνω από το κέντρο της δίνης είναι μεγαλύτερες (έως και 5 φορές) σε σχέση με τις ταχύτητες της δίνης κάτω από το κέντρο της.

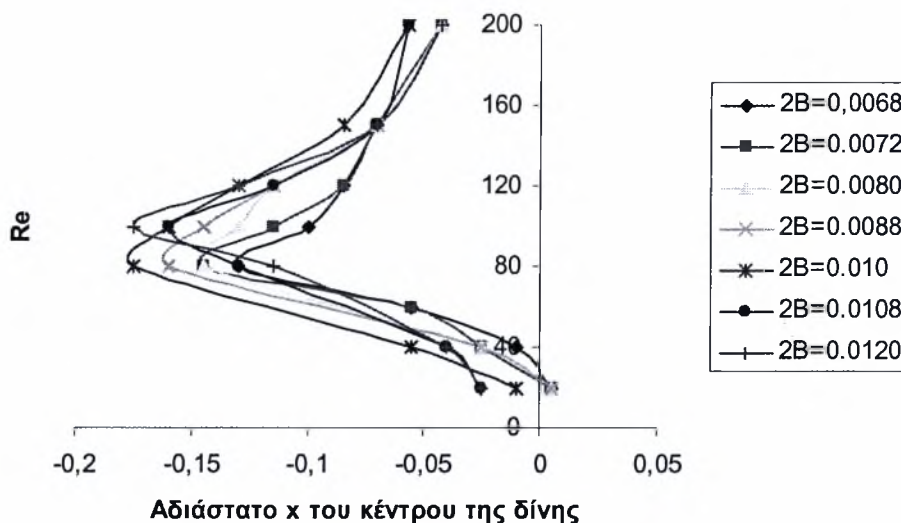


Σχήμα 5.3.15. Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στα χαρακτηριστικά της δίνης

Συγκρίνοντας τα χαρακτηριστικά της δίνης A και της δίνης B υπάρχουν κάποιες ομοιότητες και διαφορές. Κατ' αρχήν μια ομοιότητα στις δύο δίνες είναι ότι οι ταχύτητες u εσωτερικά των δινών, και στις δύο περιπτώσεις, είναι μεγαλύτερες στο πάνω μέρος της δίνης. Αν σκεφτούμε ότι η δίνη A βρίσκεται πάνω από τη δίνη B αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι οι ταχύτητες καθώς κινούμαστε από την ελεύθερη επιφάνεια προς τον πάτο του τοιχώματος μειώνονται δραματικά, πράγμα το οποίο είναι πολύ λογικό. Επομένως και οι δίνες που βρίσκονται πλησιέστερα στον πάτο έχουν μικρότερη ένταση και οι ταχύτητές τους είναι μικρότερης τάξης σε σχέση με τις δίνες που βρίσκονται πλησιέστερα στην ελεύθερη επιφάνεια.

Αφού εξετάστηκε η μετατόπιση της δίνης B στον άξονα y, σ' αυτό το σημείο θα αναλυθεί η μετατόπιση της δίνης B στον άξονα x με τη μεταβολή των δύο βασικών παραγόντων, του βάθους τοιχώματος και του αριθμού Reynolds. Στο Σχήμα 5.3.16 η αδιαστατοποίηση του άξονα x έγινε ως προς το κέντρο της κοιλότητας. Με τον τρόπο

αυτό βλέπουμε τη θέση που έχει η δίνη μέσα στην κοιλότητα. Παρατηρούμε ότι σχεδόν σε όλες τις συνθήκες το κέντρο της δίνης βρίσκεται στο αριστερό μέρος της κοιλότητας. Αναλυτικότερα, ξεκινώντας από μικρό αριθμό Reynolds, η δίνη βρίσκεται στο κέντρο της κοιλότητας. Αυξάνοντας τον αριθμό Reynolds η δίνη μετακινείται προς τα αριστερά της κοιλότητας.



Σχήμα 5.3.16. Επίδραση του αριθμού Reynolds και του βάθους του τοιχώματος στην οριζόντια θέση της δίνης

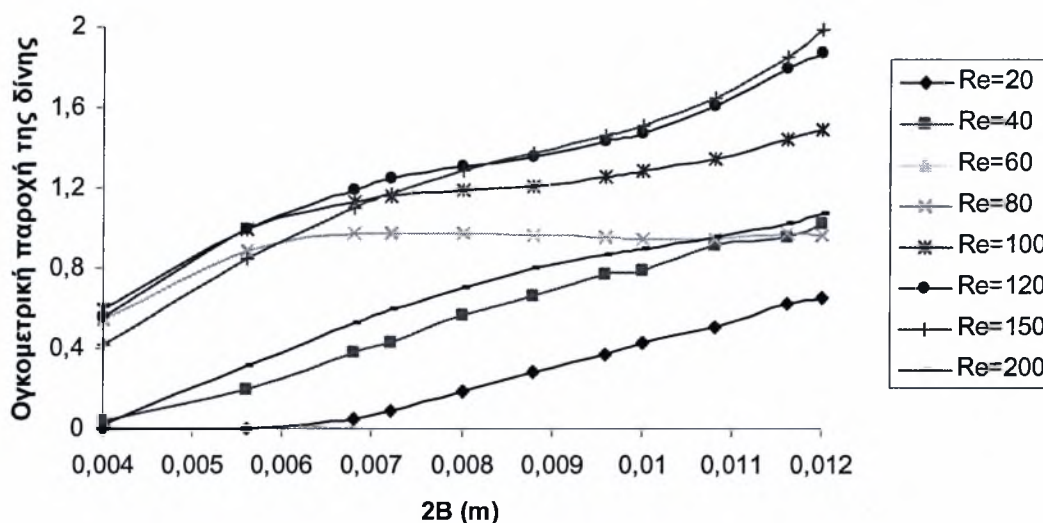
Οι μεταβολές αυτές είναι αρκετά σημαντικές αν λάβουμε υπόψη ότι μία μεταβολή στο διάγραμμα κατά 0,1 αντιστοιχεί σε μετατόπιση του κέντρου της δίνης κατά 10% σε σχέση με το μήκος κύματος του τοιχώματος. Η δίνη συνεχίζει να κινείται στο αριστερό μέρος της κοιλότητας μέχρι ο αριθμός Reynolds να πάρει τιμή 80-100. Με περαιτέρω αύξηση του αριθμού Reynolds η δίνη κινείται πλέον προς το κέντρο της κοιλότητας, επιστρέφοντας στην αρχική της θέση.

Η διαδικασία αυτή της μετατόπισης της δίνης B είναι η ίδια ανεξαρτήτως του βάθους του τοιχώματος. Το μόνο που αλλάζει είναι το εύρος της μετατόπισης. Σε μεγαλύτερα βάθη τοιχώματος, οι μετατοπίσεις του κέντρου της δίνης είναι μεγαλύτερες σε σύγκριση με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις σε μικρότερα βάθη τοιχώματος.

Όσο αναφορά την ογκομετρική παροχή της δίνης κατά την ανακυκλοφορία της, ένα από τα χαρακτηριστικότερα μεγέθη της έντασης και της ισχύος της δίνης, αυτή δίνεται από το Σχήμα 5.3.17. Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι αυξάνοντας το βάθος του



τοιχώματος η παροχή αυξάνει μονοτονικά, ανεξαρτήτως του αριθμού Reynolds. Μόνο στην περίπτωση που  $Re=80$  η ογκομετρική παροχή της δίνης παρατηρούμε ότι αρχικά αυξάνεται και έπειτα διατηρείται σχεδόν σταθερή, με κάποιες μικρές αυξομειώσεις, μεταβάλλοντας το βάθος του τοιχώματος.



Σχήμα 5.3.17. Επίδραση του αριθμού Reynolds και του βάθους του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή της δίνης

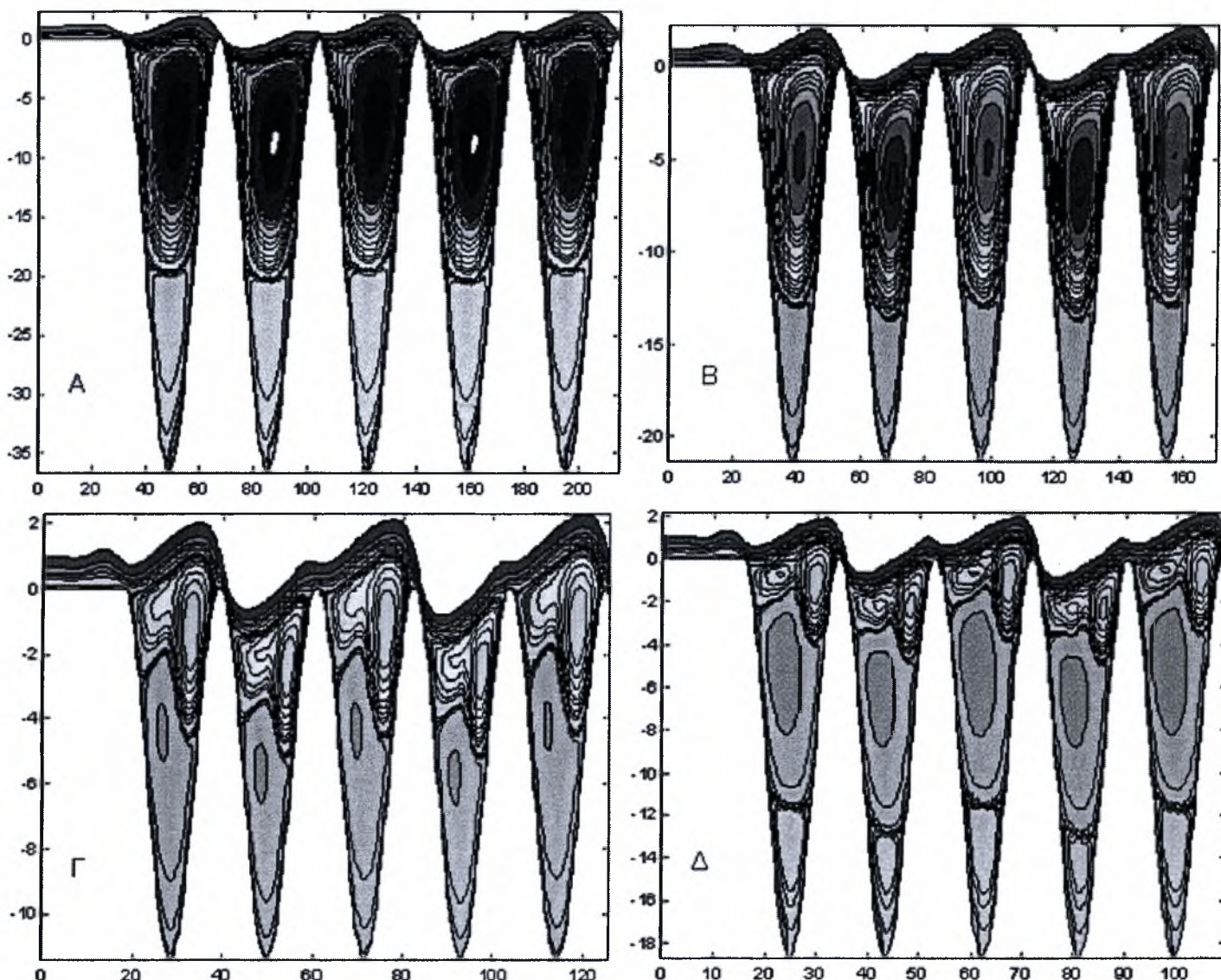
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η παροχή της δίνης παρουσιάζει μέγιστες τιμές για ένα εύρος αριθμών Reynolds μεταξύ των τιμών 120 και 150. Πιο συγκεκριμένα, είναι μικρή σε μικρούς αριθμούς Reynolds (για  $Re=20$  και βάθος τοιχώματος 0,0068 m η δίνη B μόλις έχει σχηματιστεί και η ογκομετρική της παροχή είναι πολύ μικρή), αυξάνεται μεγαλώνοντας τον Reynolds μέχρι  $Re=120$  και με περαιτέρω αύξηση στο  $Re=150$  παραμένει σχεδόν σταθερή. Τέλος, αν ο αριθμός  $Re$  αυξηθεί κι άλλο ( $Re=200$ ) η ογκομετρική παροχή μειώνεται αισθητά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι συγκρίνοντας τα Σχήματα 5.3.10 και 5.3.17 η ογκομετρική παροχή της δίνης A προκύπτει έως και 10 φορές μεγαλύτερη σε σχέση με τη δίνη B. Δηλαδή, η δίνη A εμφανίζεται πολύ πιο ισχυρή από τη δίνη B. Αυτό είναι απολύτως λογικό εφόσον η δίνη A είναι πιο μακριά από το τοίχωμα σε σχέση με την άλλη.

#### ✓ Η μορφή της δίνης

Στο σημείο αυτό θα αναδειχθούν κάποια σχήματα με τις μορφές που έχει η δίνη B σε διαφορετικές συνθήκες ροής. Η μορφή της δίνης B είχε προβληθεί και σε

προηγούμενη ενότητα. Η δίνη B στις περισσότερες περιπτώσεις εμφανίζεται αρκετά συμμετρική. Μόνο σε υψηλούς αριθμούς Reynolds,  $Re > 80$ , και για μεγάλα βάθη τοιχώματος πάνω από  $0,005m$ , χάνει λίγο τη συμμετρικότητά της. Η ανάδειξη τεσσάρων μόνο σχημάτων όπου η δίνη εμφανίζεται στις δύο περιπτώσεις συμμετρική και στις άλλες δύο λιγότερο συμμετρική, αποδεικνύει ότι η δίνη B είναι αρκετά πιο συμμετρική σε σύγκριση με τη δίνη A.



Σχήμα 5.3.18 Αναπαράσταση της μορφής της B για συνθήκες ροής: A.  $Re=20$  και βάθος τοιχώματος  $0,012m$  B.  $Re=40$  και βάθος τοιχώματος  $0,0080m$  Γ.  $Re=100$  και βάθος τοιχώματος  $0,0064m$  Δ.  $Re=150$  και βάθος τοιχώματος  $0,012m$

**5.4. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ**

Η επιρροή του κυματοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας είναι πολύ σημαντική. Αντίθετα με την περίπτωση του επίπεδου τοιχώματος, όπου υπό μόνιμες συνθήκες η ελεύθερη επιφάνεια είναι επίπεδη, στην περίπτωση του ημιτονοειδούς τοιχώματος δημιουργούνται διαταραχές στην ελεύθερη επιφάνεια οι οποίες εξαρτώνται από τον αριθμό Reynolds και από το βάθος του τοιχώματος.

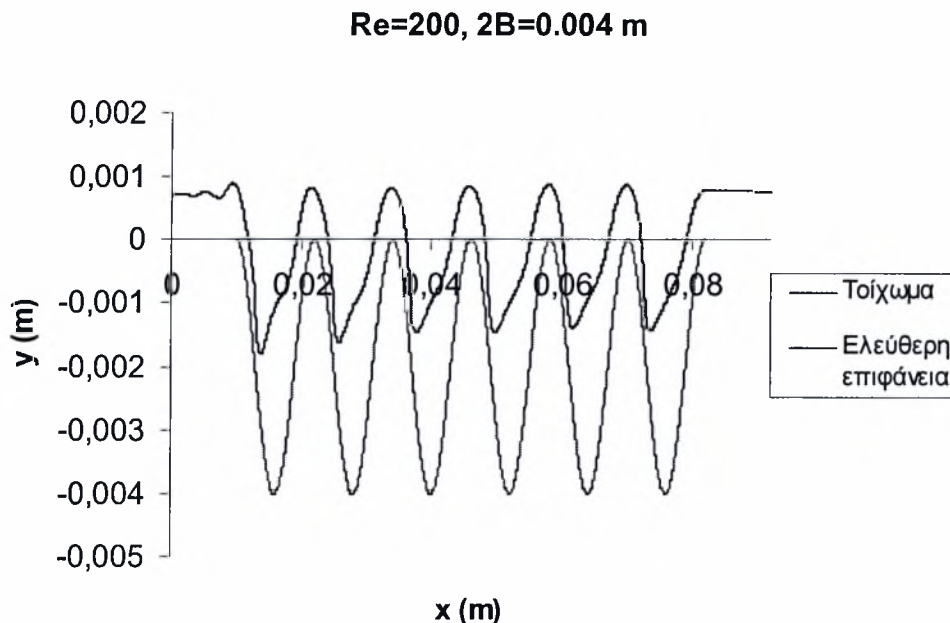
Στην ενότητα αυτή θα γίνει αρχικά μία αναφορά στις βασικές μορφές της ελεύθερης επιφάνειας, έπειτα θα περιγραφεί και θα αναλυθεί η επίδραση του βάθους του τοιχώματος και του αριθμού Reynolds στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας και τέλος θα γίνει μία αναφορά στο αρμονικό της περιεχόμενο.

✓ Μορφολογία ελεύθερης επιφάνειας

Οι μορφές που μπορεί να πάρει η ελεύθερη επιφάνεια χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία ελεύθερης επιφάνειας εμφανίζεται σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, ενώ η δεύτερη σε χαμηλότερους. Τα χαρακτηριστικά των δύο μορφών της ελεύθερης επιφάνειας διαφέρουν σημαντικά και η μεταπήδηση από τη μία μορφή στην άλλη είναι σταδιακή. Η μεταβολή των χαρακτηριστικών της ελεύθερης επιφάνειας εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό Reynolds. Γι' αυτόν το λόγο θα γίνει πρώτα μία ανάλυση της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας σε σχέση με τη σταδιακή μεταβολή του αριθμού Reynolds.

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.4.1 δημιουργούνται στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού διαταραχές. Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι διαταραχές έχουν κορυφές που αντιστοιχούν στις κορυφές του κυματοειδούς τοιχώματος. Φαίνεται δηλαδή το ρευστό να ρέει ακολουθώντας τη γεωμετρία του τοιχώματος. Η γεωμετρία αυτή της ροής δεν είναι όμως η ίδια για όλες τις συνθήκες ροής. Παρακάτω θα δούμε ότι οι διαταραχές αποκτούν διαφορετική μορφή σε διαφορετικούς αριθμούς Reynolds.





Σχήμα 5.4.1. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας

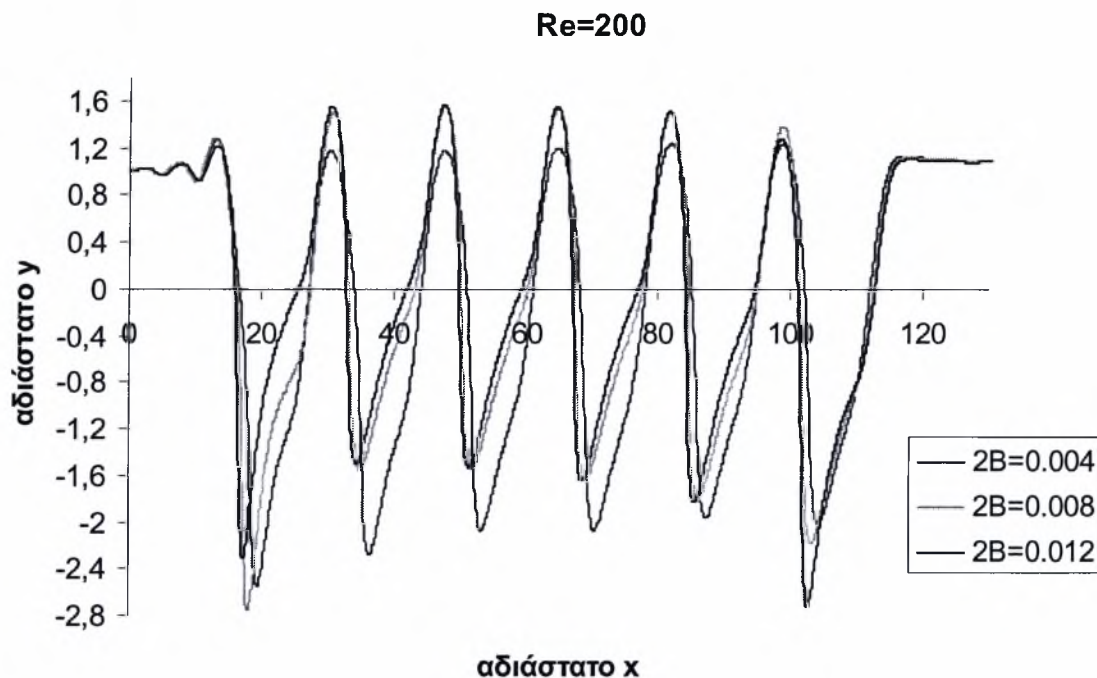
✓ Περιγραφή της επίδρασης του αριθμού Reynolds και του βάθους του τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας

Σκόπιμα η ανάλυση των αποτελεσμάτων ξεκινάει από σχετικά μεγάλο αριθμό Reynolds,  $Re=200$ , και μειώνεται σταδιακά. Για  $Re=200$  στο Σχήμα 5.4.2 φαίνεται ότι σε μεγάλο βάθος 0,012 m οι κορυφές των κυματώσεων της ελεύθερης επιφάνειας που σχηματίζονται είναι ψηλότερες από ότι σε μικρότερα βάθη, 0,004 και 0,008 m.

Επίσης, στο εσωτερικό των κοιλοτήτων για μεγαλύτερο βάθος τοιχώματος το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας αυξάνεται, ενώ παράλληλα τα ελάχιστα ύψη της επιφάνειας του ρευστού μετατοπίζονται προς τα αριστερά.

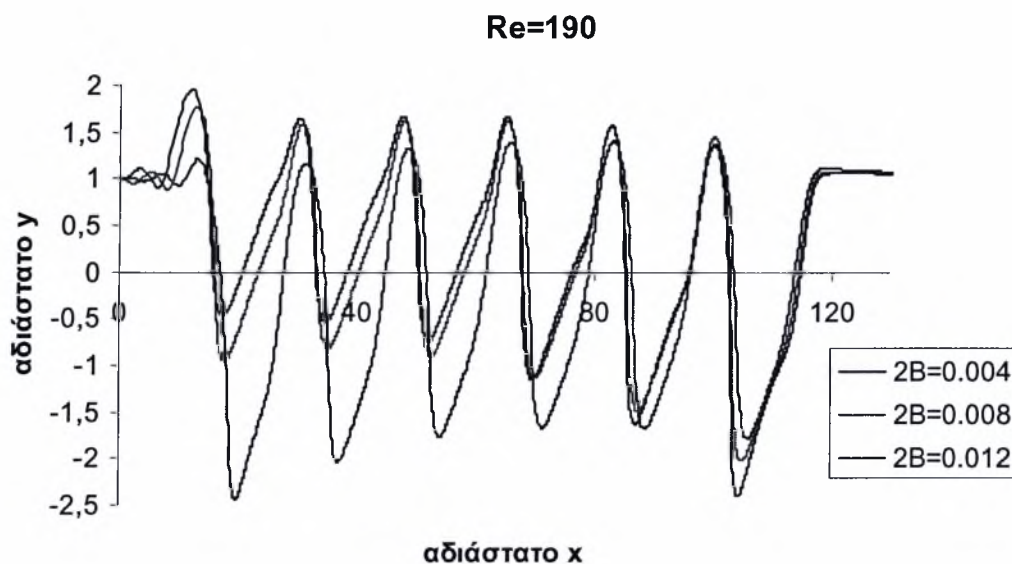
Παρατηρώντας τα Σχήματα 5.4.2 και 5.4.3 συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στη ροή. Η ροή για  $Re=190$  είναι όμοια με τη ροή του ρευστού για  $Re=200$ . Μία αξιοσημείωτη ομοιότητα των δύο σχημάτων είναι ότι καθώς το ρευστό κινείται πάνω από το ημιτονοειδές τοίχωμα, το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας πάνω από τις κοιλότητες μειώνεται από την προηγούμενη κοιλότητα στην επόμενη.



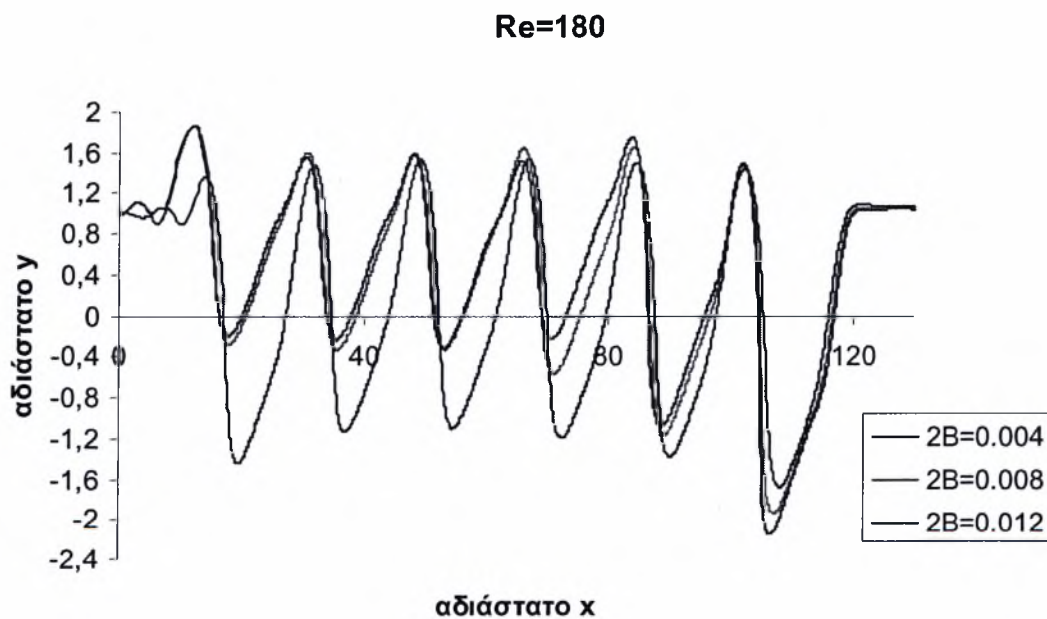


Σχήμα 5.4.2. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθος: 0,004-0,008-0,012 m)

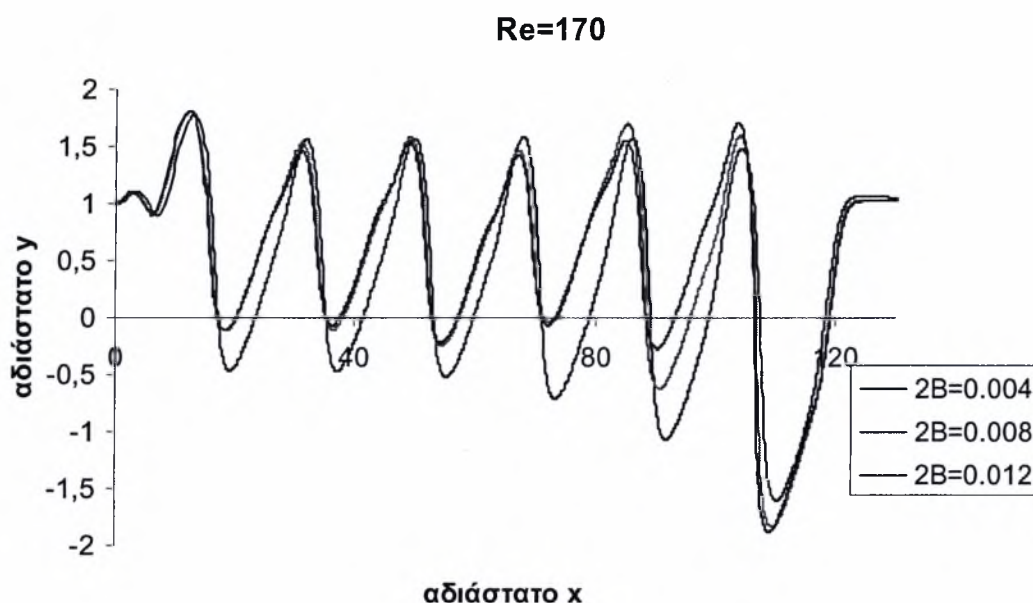
Οι μόνες διαφορές στα δύο Σχήματα είναι πριν την είσοδο του ρευστού στο ημιτονοειδές τοίχωμα, όπου σε μεγάλο βάθος τοιχώματος και για  $Re=190$  δημιουργείται μία κορυφή στην ελεύθερη επιφάνεια. Η κορυφή αυτή μπορούμε να υποθέσουμε ότι οφείλεται στην ύπαρξη μιας δίνης εσωτερικά της ροής. Η δίνη αυτή φαίνεται και στα σχήματα που είδαμε νωρίτερα στην αρχή του κεφαλαίου. Μία επιπλέον διαφορά είναι ότι, για  $Re=190$  και σε μεγάλο βάθος τοιχώματος, το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας είναι μεγαλύτερο από ότι για  $Re=200$ . Δηλαδή η ροή είναι περισσότερο διαταραγμένη. Να σημειωθεί ότι στα διαγράμματα αυτά δε θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη τη ροή στην είσοδο και στην έξοδο του ημιτονοειδούς τοιχώματος, δηλαδή τη ροή στην πρώτη και στην τελευταία κοιλότητα. Πρέπει να κοιτάμε την επίδραση των παραμέτρων που επηρεάζουν τη ροή του ρευστού στο τμήμα του τοιχώματος που έχει αναπτυχθεί πλήρως η ροή, γιατί στα σημεία εισόδου και εξόδου υπάρχουν παράγοντες που επηρεάζουν τη ροή που δε μπορούν να διαστατοποιηθούν και να μετρηθεί η επίδρασή τους.



Σχήμα 5.4.3. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθη: 0,004-0,008-0,012 m)



Σχήμα 5.4.4. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθη: 0,004-0,008-0,012 m)

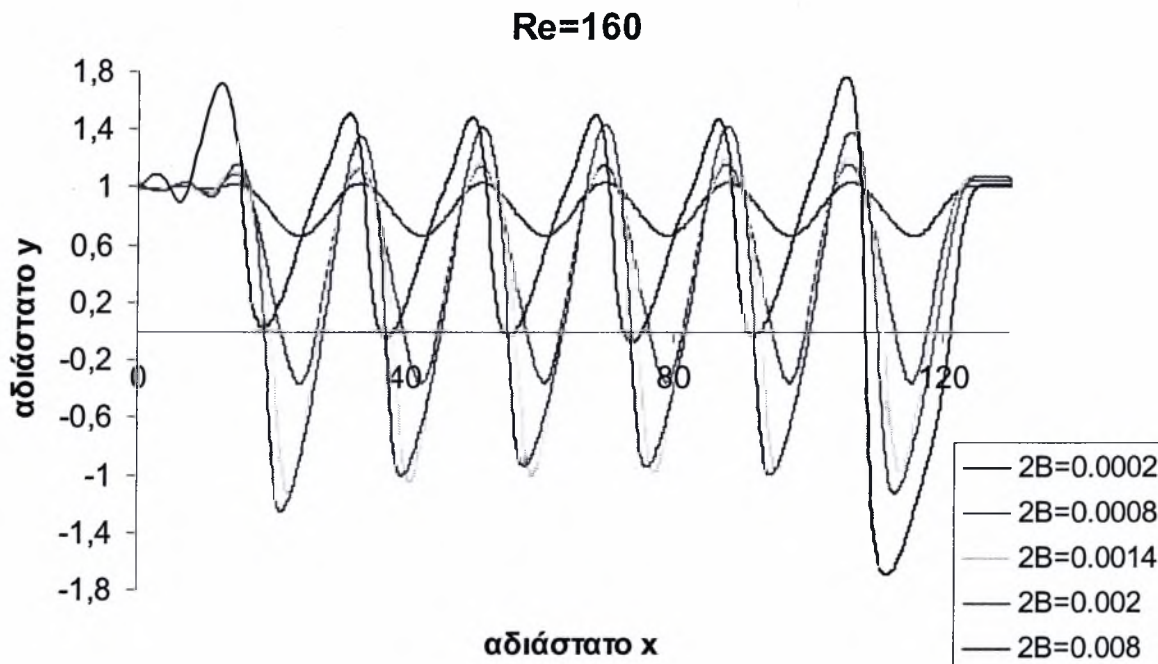


Σχήμα 5.4.5. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθος: 0,004-0,008-0,012 m)

Συγκρίνοντας τα Σχήματα 5.4.2, 5.4.3, 5.4.4, 5.4.5, παρατηρούμε ότι οι διαφορές τους είναι ελάχιστες. Η μόνη διαφορά είναι ότι μειώνοντας τον αριθμό Reynolds το ελάχιστο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας, που είναι υπερκείμενο στις κοιλότητες του ημιτονοειδούς τοιχώματος, αυξάνεται. Επιπλέον υπάρχουν και κάποιες μικροδιακυμάνσεις στα μέγιστα ύψη της ελεύθερης επιφάνειας.

Μέχρι εδώ θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η επίδραση του αριθμού Reynolds στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας είναι πολύ μικρή. Παρακάτω όμως θα δούμε ότι η υπόθεση αυτή είναι τελείως λανθασμένη. Τα πάντα αλλάζουν όταν μειώσουμε τον αριθμό Reynolds στο 160. Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας και οι διαταραχές της εμφανίζουν ποιοτικές διαφορές.

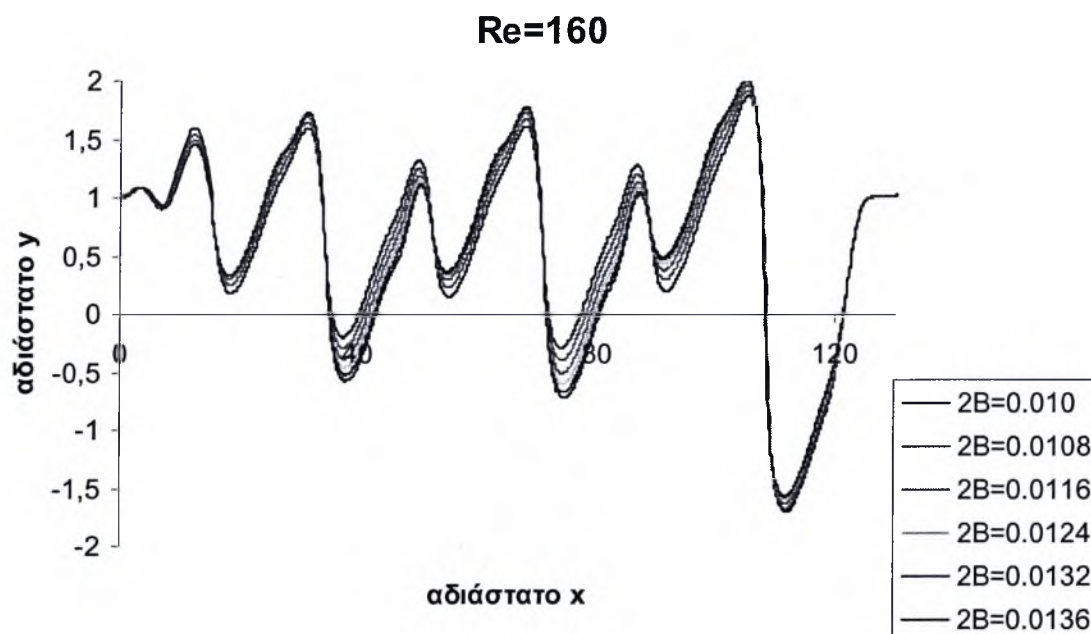
Αναλυτικότερα, για αριθμό Reynolds 160 ξεκινώντας από μικρό βάθος, 0,0002 m, και αυξάνοντας το βάθος παρατηρούμε ότι το μέγιστο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας αυξάνεται, η ελεύθερη επιφάνεια 'κυματώνεται' περισσότερο μέχρι και για βάθος 0,002 m. Έπειτα σε μεγαλύτερο βάθος 0,008 οι διαταραχές φαίνεται να μικραίνουν.



Σχήμα 5.4.6. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθη: 0,0002-0,0008-0,0014-0,002-0,008 m)

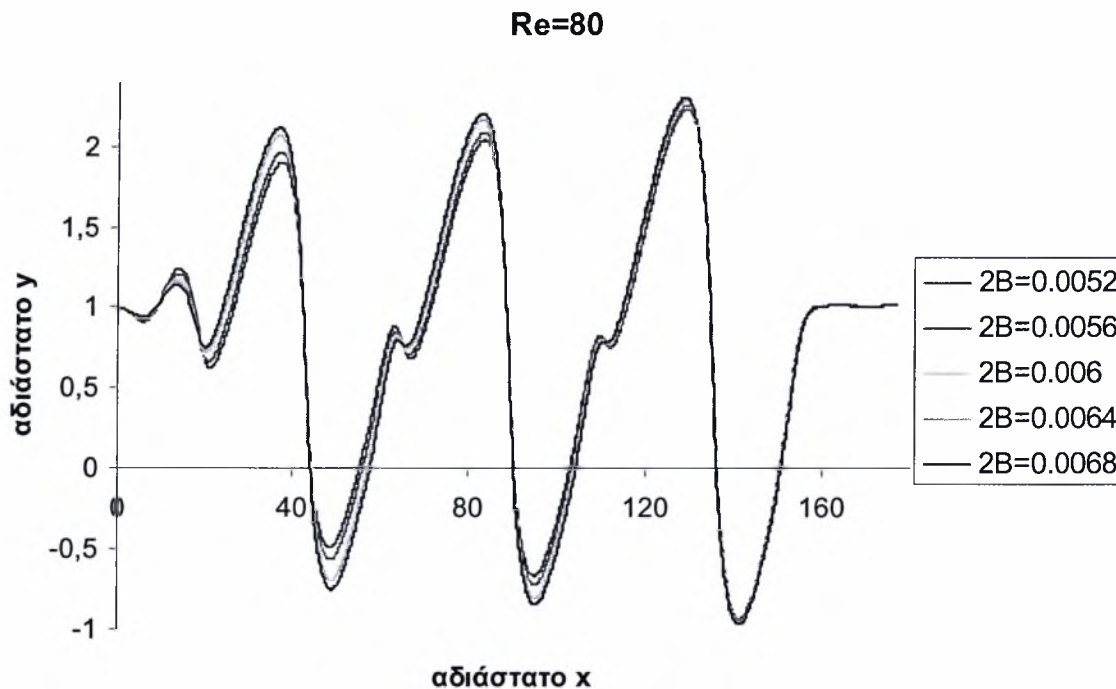
Αυξάνοντας το βάθος περαιτέρω σε 0,01 m παρατηρούμε ότι δημιουργούνται ισχυρές κυματώσεις ενώ ταυτόχρονα άλλες εξασθενούν όπως φαίνεται από το Σχήμα 5.4.7. Δηλαδή, δημιουργείται μία περιοδικότητα στη ροή διαφορετική από την προηγούμενη. Οι κορυφές της ελεύθερης επιφάνειας, που βρίσκονται πάνω από τις κορυφές του κυματοειδούς τοιχώματος, δείχνουν ανά δύο η μία να εξασθενεί και η άλλη να ισχυροποιείται. Μάλιστα, αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος, το ύψος της μικρής κυμάτωσης μειώνεται ενώ της άλλης αυξάνεται, φαίνεται δηλαδή ότι η ισχυρή κυμάτωση προσπαθεί να απορροφήσει τη μικρότερη. Προκύπτει επομένως η περιοδικότητα που αναφέραμε και σε προηγούμενη ενότητα ως προς την ανάλυση των χαρακτηριστικών των δινών με διπλάσιο μήκος κύματος σε σχέση με το μήκος κύματος του ημιτονοειδούς τοιχώματος.





Σχήμα 5.4.7. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθη: 0,01-0,0108-0,0116-0,0124-0,0132-0,0136 m)

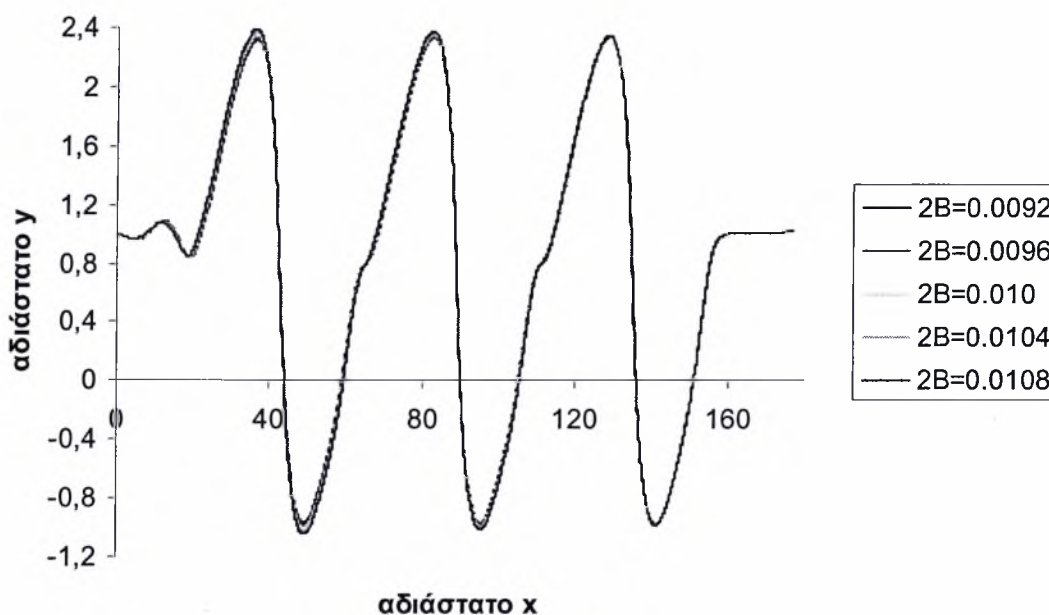
Σε αριθμούς Reynolds 160 και παρακάτω αυτή είναι η κύρια μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Η μόνη διαφορά είναι ότι αλλάζει το ύψος των διαταραχών. Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε τη μορφολογία της ελεύθερης επιφάνειας στην περίπτωση που ο Re είναι 80. Αναλύοντας το Σχήμα 5.4.8, ξεκινώντας από βάθος τοιχώματος 0,0052 m και αυξάνοντας το ύψος της κοιλότητας παρατηρούμε ότι οι ασθενείς κυματώσεις, εξασθενούν και παράλληλα απορροφώνται από τις ισχυρές κυματώσεις οι οποίες δυναμώνουν, αυξάνοντας το ύψος τους και το πλάτος τους. Ταυτόχρονα το ελάχιστο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας πάνω από τις κοιλότητες μειώνεται.



Σχήμα 5.4.8. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθη: 0,0052-0,0056-0,006-0,0064-0,0068 m)

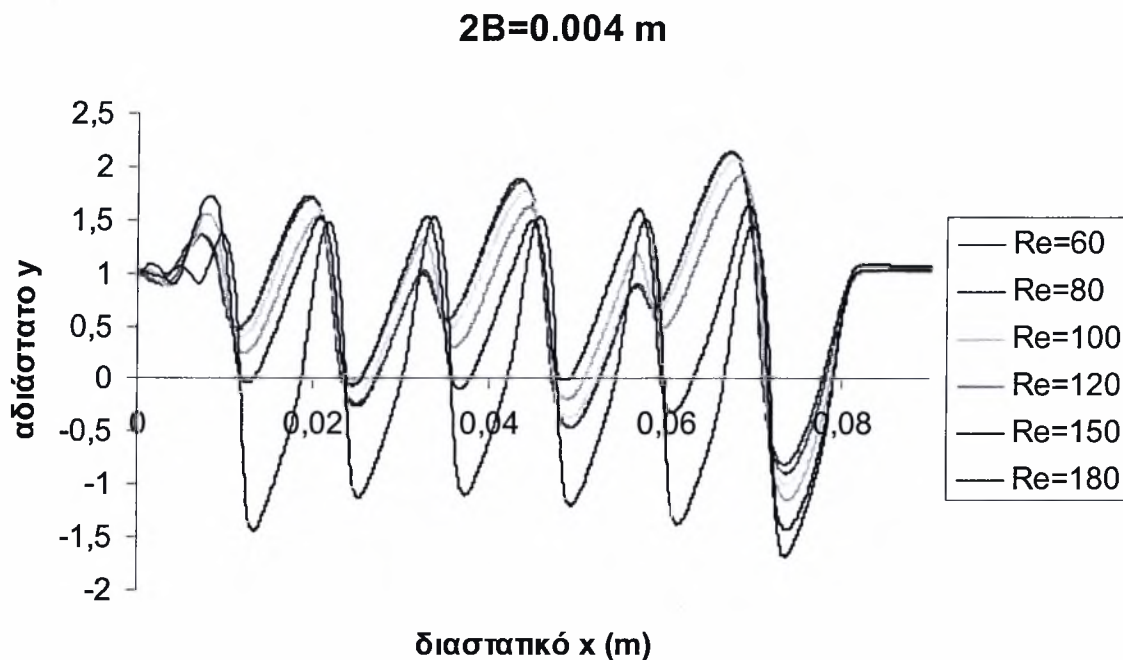
Σε μεγαλύτερα βάθη τοιχώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.9, οι ασθενείς κυματώσεις έχουν σχεδόν εξαφανισθεί, ενώ οι ισχυρές έχουν γίνει πολύ απότομες, το ύψος τους έχει αυξηθεί αισθητά ενώ εμφανίζουν μία πολύ μικρή κύρτωση (καμπούρα) στο πίσω μέρος τους, η οποία απέμεινε λόγω της απορρόφησης των μικρών κυματώσεων από τις ισχυρές. Ταυτόχρονα το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας πάνω από τις κοιλότητες έχει μειωθεί αρκετά, ενισχύοντας έτσι τις μεγάλες κυματώσεις.

Re=80



Σχήμα 5.4.9. Επίδραση του βάθους του ημιτονοειδούς τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. (Βάθη: 0,0092-0,0096-0,010-0,0104-0,0108 m)

Συγκεντρωτικά στο Σχήμα 5.4.10 φαίνεται η επίδραση που έχει ο αριθμός Reynolds, σε τοίχωμα σταθερού βάθους, στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Το παρακάτω σχήμα επιβεβαιώνει τη μεταβολή στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας που αναφέραμε παραπάνω καθώς και τις δύο βασικές μορφές ελεύθερης επιφάνειας που αναλύσαμε. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι για αριθμό Reynolds 180 η ελεύθερη επιφάνεια παίρνει τη μορφή ισοϋψών κυματώσεων. Μειώνοντας τον αριθμό Reynolds στο 150 οι κυματώσεις αυτές μικραίνουν αλλά διατηρούν τη βασική τους μορφή, παραμένουν ισοϋψείς. Ελαττώνοντας περαιτέρω τον αριθμό Reynolds στο 120 παρατηρούμε άλλες κυματώσεις μικραίνουν ενώ άλλες μεγαλώνουν. Στην περίπτωση που ο Reynolds είναι 80 οι μικρές κυματώσεις έχουν σχεδόν εξασθενήσει. Παράλληλα οι ισχυροί κυματισμοί αυξάνουν το ύψος τους και το πλάτος τους.



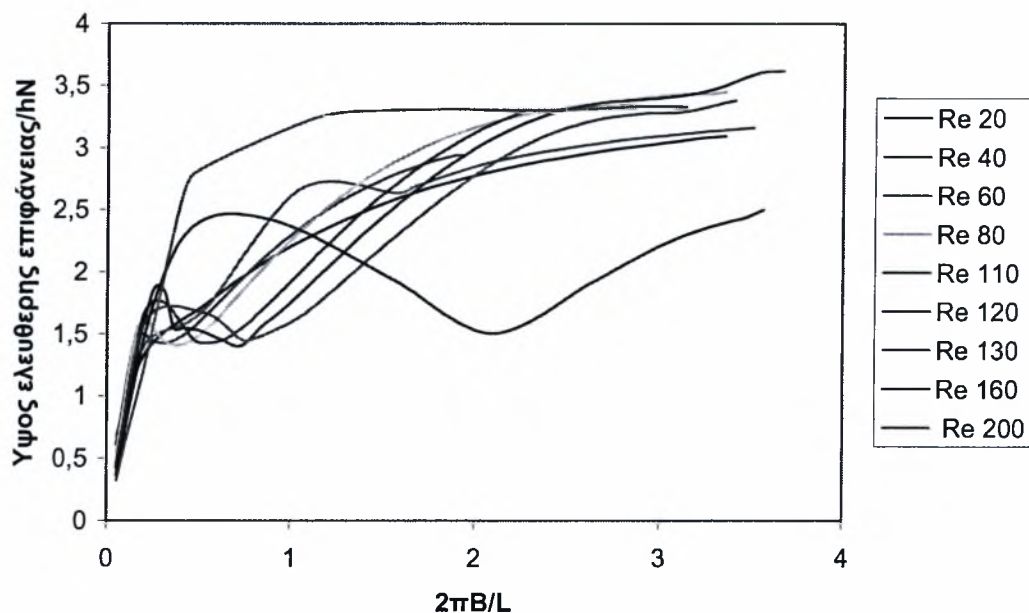
Σχήμα 5.4.10. Επίδραση του αριθμού Reynolds στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

✓ Ανάλυση της επίδρασης του βάθους του τοιχώματος και του αριθμού Reynolds στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας

Όπως είδαμε εποπτικά και παραπάνω, η επίδραση του αριθμού Reynolds και του βάθους τοιχώματος στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας είναι πολύ σημαντική. Σ' αυτό το σημείο θα ομαδοποιηθούν τα αποτελέσματά μας για να διευκρινιστεί η επενέργεια του καθενός παράγοντα ξεχωριστά.

Πρώτα θα εξεταστεί η επίδραση του βάθους του τοιχώματος. Για πολύ μικρά βάθη τοιχώματος το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας αυξάνει απότομα (σύμφωνα και με τη γραμμική θεωρία) για όλους τους Reynolds. Μάλιστα σε μικρούς Reynolds παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Με την περαιτέρω αύξηση του βάθους του τοιχώματος η ελεύθερη επιφάνεια μεγαλώνει ασυμπτωτικά. Βαθύτερες κοιλότητες επηρεάζουν όλο και λιγότερο το ύψος της. Σε μεγάλους αριθμούς Reynolds (200) όπου το πάχος του υμένα είναι μεγαλύτερο, η επίδραση βάθους της κοιλότητας είναι έντονη μόνο όταν αυτό είναι μικρό.

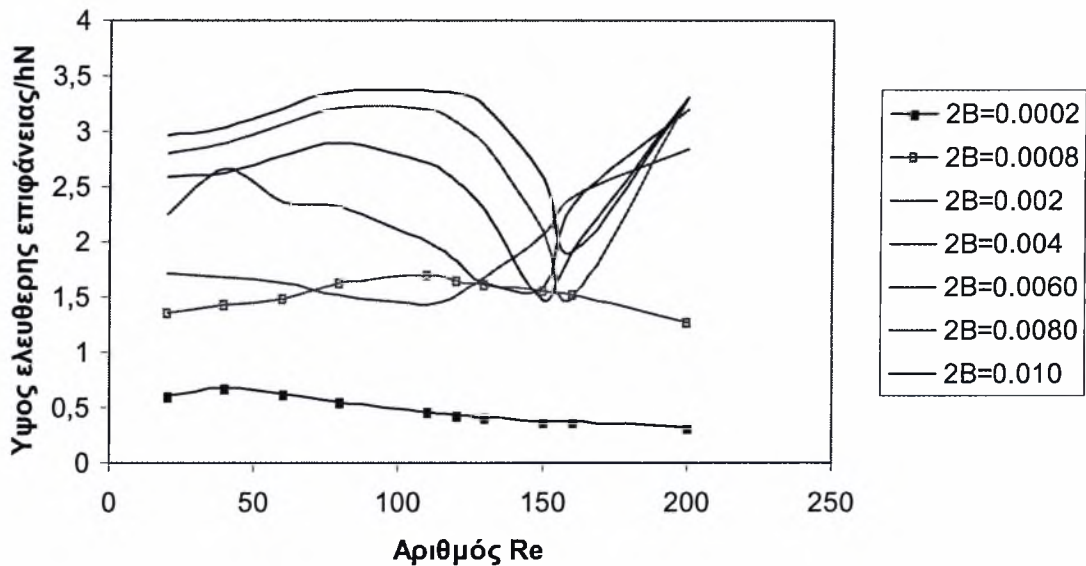




Σχήμα 5.4.10. Επίδραση του αριθμού Reynolds στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας.

Η επίδραση του αριθμού Reynolds είναι εξίσου σημαντική. Στο Σχήμα 5.4.11 όπως και στο προηγούμενο παρατηρούμε ότι για μικρό βάθος τοιχώματος μία μικρή αύξηση από 0,0002 σε 0,0008 προκαλεί απότομη αύξηση στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας (καμπύλες μπλε και μωβ), ανεξαρτήτως του αριθμού Reynolds. Το ύψος της σε μικρά βάθη τοιχώματος δείχνει να παραμένει σχεδόν σταθερό για όλους τους Reynolds.

Σε μεγαλύτερα βάθη το ύψος της επιφάνειας παρουσιάζει ελάχιστο για Reynolds γύρω από το 150. Με περαιτέρω αύξηση του Reynolds το ύψος της αυξάνεται απότομα. Σε μεγάλα βάθη (0,004-0,01 m) τα αποτελέσματα εμφανίζονται ομαδοποιημένα ως προς την παραπάνω συμπεριφορά. Η περιοχή 130-200 φαίνεται να επηρεάζει πιο έντονα το ύψος της επιφάνειας. Υπάρχει η αίσθηση ότι βλέπουμε ένα κομμάτι ενός πιο πολύπλοκου φαινομένου.

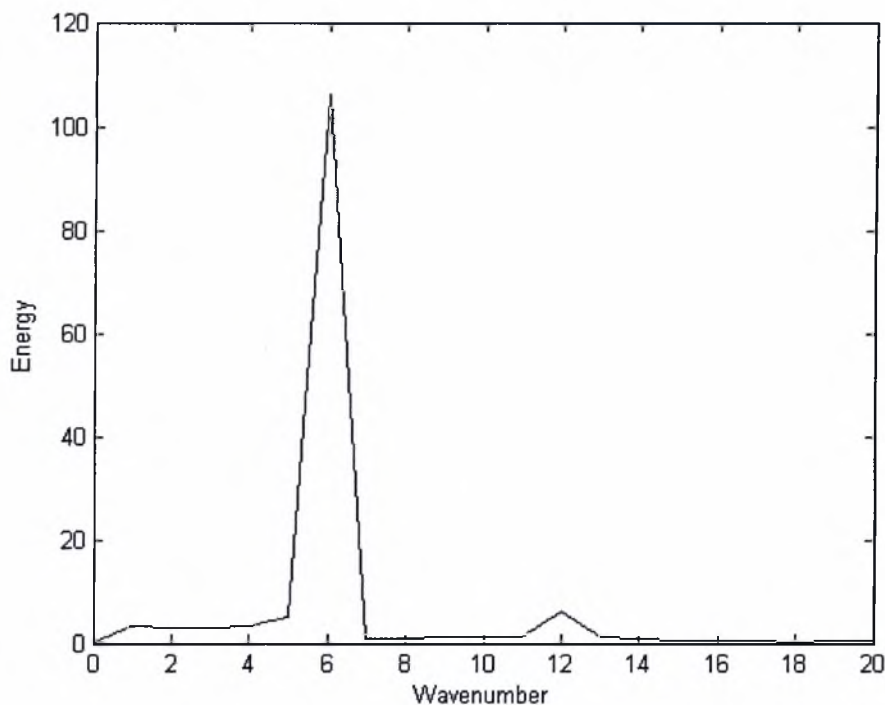


Σχήμα 5.4.10. Επίδραση του βάθους τοιχώματος και του αριθμού Reynolds στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

#### ✓ Αρμονικό περιεχόμενο

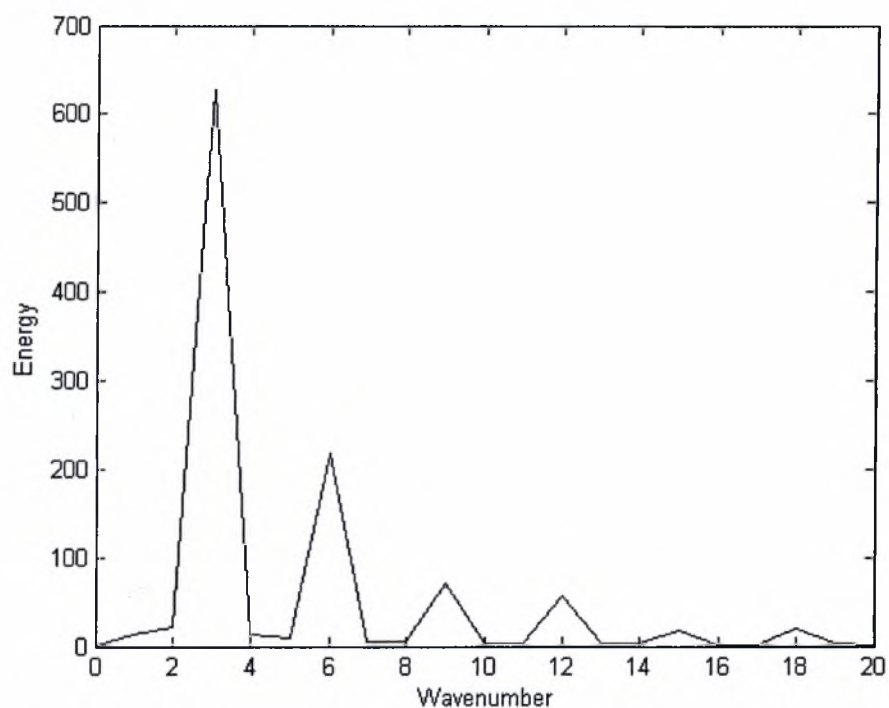
Είναι γνωστό από τη βασική θεωρία των μαθηματικών ότι μία περιοδική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή των σειρών Fourier. Η ανάλυση μιας συνάρτησης στις αρμονικές της παρέχει πληροφορίες για την ενέργεια που φέρει η κάθε μια αρμονική. Έτσι, η αρμονική με τη μεγαλύτερη ενέργεια είναι η κύρια αρμονική του φαινομένου. Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας ως περιοδική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με τη χρήση αυτών των σειρών. Αναλύοντας το πρόβλημα με τον τρόπο αυτό μπορούμε να βγάλουμε πολύ σημαντικά συμπεράσματα για την περιοδικότητα της ελεύθερης επιφάνειας.

Στα παρακάτω Σχήματα δίνεται ενδεικτικά η ελεύθερη επιφάνεια αναλυμένη σε σειρές Fourier για δύο διαφορετικά βάθη τοιχώματος και για αριθμό Re 80. Στο πρώτο Σχήμα για βάθος τοιχώματος  $2B=0.0002$  m η κύρια αρμονική αντιστοιχεί στον έκτο κυματαριθμό. Έτσι, η περιοδικότητα της ελεύθερης επιφάνειας συμπίπτει με την περιοδικότητα του τοιχώματος (έχουμε έξι περιόδους για το τοίχωμα και έξι για την ελεύθερη επιφάνεια).



Σχήμα 5.4.11. Αναπαράσταση των κύριων αρμονικών της ελεύθερης επιφάνειας σε συνθήκες ροής:  $2B=0,0001\text{ m}$  και  $Re=80$

Αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος σε  $2B=0,0128$ , όπως έχει αναφερθεί παραπάνω η ελεύθερη επιφάνεια μεταβαίνει σε συνάρτηση με περιοδικότητα διπλάσιου μήκους κύματος. Αυτό παριστάνεται στο Σχήμα 5.4.12 όπου η κύρια αρμονική πια, δεν αντιστοιχεί στον έκτο κυματαριθμό αλλά στον τρίτο. Την ενέργεια του κύματος δηλαδή φέρει η πρώτη υποαρμονική.



Σχήμα 5.4.12. Αναπαράσταση των κύριων αρμονικών της ελεύθερης επιφάνειας σε συνθήκες  
ροής:  $2B=0,0128\text{ m}$  και  $Re=80$



**Κεφάλαιο****6****6.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά τα βασικότερα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η μελέτη πραγματοποιείται την προσομοίωση της ροής υγρού υμένα πάνω σε περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα. Το τοίχωμα είναι κεκλιμένο με γωνία κλίσης  $10^\circ$  και περίοδο σταθερή με μήκος κύματος 0,012 m. Εξετάστηκε η επίδραση δύο βασικών παραγόντων, του βάθους τοιχώματος και του αριθμού Reynolds, στα μορφολογικά χαρακτηριστικά της ροής, τα οποία είναι η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας και η εμφάνιση δινών αποκόλλησης στο εσωτερικό της ροής.

- ✓ Ξεκινώντας από πολύ μικρό βάθος τοιχώματος παρατηρήθηκε ότι το ρευστό ρέει κανονικά ακολουθώντας τη μορφή του τοιχώματος για όλες τις παροχές. Αυξάνοντας σταδιακά το βάθος του τοιχώματος σχηματίζεται η πρώτη δίνη αποκόλλησης, Α, στον πάτο της κοιλότητας του τοιχώματος, και στη συνέχεια μία δεύτερη δίνη (Β) ή και περισσότερες. Οι δύο δίνες περιστρέφονται με αντίθετη φορά, ενώ η δίνη Α είναι σαφώς ισχυρότερη της Β.
- ✓ Οι δίνες Α και Β παραμένουν σε χαμηλούς Re προσκολλημένες στον πυθμένα των κοιλοτήτων του τοιχώματος, ενώ με αύξηση του Re μετακινούνται σταδιακά προς την ελεύθερη επιφάνεια. Η δίνη Α εμφανίζεται στις περισσότερες περιπτώσεις στο κατάντη τμήμα της κοιλότητας, ενώ η Β είναι μετατοπισμένη

προς το ανάντη. Η ισχύς των δινών χαρακτηρίζεται από την ογκομετρική τους παροχή, η οποία για σταθερό βάθος τοιχώματος παρουσιάζει μέγιστο σε ενδιάμεσες τιμές του αριθμού  $Re$ .

- ✓ Η ύπαρξη του περιοδικού τοιχώματος προκαλεί παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας της ροής. Για μικρά βάθη τοιχώματος, το ύψος του στατικού κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας είναι ανάλογο του βάθους του τοιχώματος, σε συμφωνία με τη γραμμική θεωρία. Αντίθετα, για μεγάλα βάθη τοιχώματος, το ύψος της παραμόρφωσης της επιφάνειας τείνει σε σταθερή τιμή.
- ✓ Παρατηρήθηκε ότι η ροή εμφανίζει δύο είδη περιοδικότητας. Σε μικρά βάθη τοιχώματος, και ανεξάρτητα από τον αριθμό Reynolds, η ροή εμφανίζει περιοδικότητα με μήκος κύματος ίσο με αυτό του τοιχώματος. Με αύξηση του βάθους τοιχώματος, εμφανίζεται σταδιακά μία υποαρμονική συνεισφορά με μήκος κύματος διπλάσιο του τοιχώματος. Σε τοιχώματα μεγάλου βάθους, και ιδιαίτερα για χαμηλούς  $Re$ , η υποαρμονική κυριαρχεί στην ελεύθερη επιφάνεια έχοντας σχεδόν εξαφανίσει την περιοδικότητα του τοιχώματος. Έτσι προκύπτουν ισχυρές παραμορφώσεις της επιφάνειας, που χαρακτηρίζονται από μεγάλο μήκος και ύψος.

## 6.2. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Με το πέρας μιας διπλωματικής εργασίας και λόγω της εμπειρίας που αποκτά ο εκάστοτε υποψήφιος, τα ερωτήματα που θέτει ο ίδιος πιθανότατα να έχουν κάποια σημασία. Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένα θέματα που προσφέρονται για περαιτέρω διερεύνηση, από τη δική μου σκοπιά.

- ✓ Με βάση τα μέχρι τώρα αποτελέσματα, το πεδίο τιμών του αριθμού Reynolds θα πρέπει να επεκταθεί σε μεγαλύτερες τιμές. Θα πρέπει να γίνει ανάλυση κυρίως

της επίδρασης που έχει η μεταβολή αυτή στα χαρακτηριστικά της ελεύθερης επιφάνειας (καθώς είδαμε ότι αυξάνοντας τον αριθμό Reynolds οι δίνες ατονούν, ενώ τα πράγματα είναι διαφορετικά για την ελεύθερη επιφάνεια).

- ✓ Περαιτέρω ανάλυση θα πρέπει να γίνει και για τα χαρακτηριστικά της ελεύθερης επιφάνειας. Να εξεταστεί αναλυτικότερα το αρμονικό της περιεχόμενο καθώς και το φαινόμενο του συντονισμού.
- ✓ Τι θα συμβεί αν επιβάλλουμε μία διαταραχή στην είσοδο της ροής; Ποια θα είναι η χρονικά μεταβλητή μορφή της ροής και ποια η σημασία των μόνιμων λύσεων της παρούσας εργασίας;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Alekseenko S.V., Nakoryakov V.Y., and Pokusaev B.G., ‘Wave formation on a vertical falling liquid film,’ *AIChE J.* **31**, 1446-1460 (1985).
- Alekseenko S.V., Nakoryakov V. Y., and Pokusaev B. G., ‘Wave flow of Liquid film’, *Begell House*, (1994).
- Argyriadi K., Serifi K. and Bontozoglou V. (2004) ‘Non linear dynamics of inclined films under low- frequency forcing’ *Phys. Fluids*, Vol. 16, No. 7
- Bontozoglou V. and Papapolymerou G. (1997) ‘Laminar film flow down a wavy incline’ *Int. J. Multiphase Flow* Vol. 23, No. 1, pp. 69-79
- Bontozoglou V. (2000) ‘Laminar film flow along a periodic wall’. *CMES*, vol. 1, no. 2, pp133-142
- Chang, H.-C., “Wave evolution on a falling film”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 103-136 (1994).
- Gao D., Morley N.B., Dhir V. (2003) ‘Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method’ *Journal of Computational Physics* 192, 624–642
- Malamataris N.A. & Papanastasiou T. C., ‘Unsteady free surface flows on truncated domains’, *Ind. Engng. Chem. Res.* **30**, 2210 (1991).
- Malamataris N. A., Vlachogiannis M., and Bontozoglou V. (2002) ‘Solitary waves on inclined films: Flow structure and binary interactions’ *Phys. Fluids*, Vol. 14, No. 3
- Liu Jun and Gollub J. P. (1994) ‘Solitary wave dynamics of film flows’ *Phys. Fluids* 6 (5)
- Pozrikidis C. (2003) ‘Effect of surfactants on film flow down a periodic wall’ *J. Fluid Mech.*, vol. 496, pp. 105-127.
- Vlachogiannis M., Bontozoglou B., “ Observations of solitary wave dynamics of film flows”, *J. Fluid Mech.*, **435**, 191 (2001).
- Wang C-Y (1981) ‘Liquid film flowing down a wavy incline’ *AIChE Journal* (Vol. 27, No. 2)
- Wierschem A. and Aksel N. (2004) ‘Influence of inertia on eddies created in films creeping over strongly undulated substrates
- Wierschem A., Scholle M. and Aksel N. (2003) ‘Vortices in film flow over strongly undulated bottom profiles at low Reynolds numbers.’ *Phys. Fluids*, Vol. 15, No. 2



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

PROGRAM ABC

C

C Non-Linear Stability Analysis of Two -Dimensional Flow of  
Newtonian liquidC down an inclined plate without undulations. A sudden change in  
the volumetricC flow rate is the initial disturbance. This is a complete free-  
surface flow

C without any slit-entrance and tricks like that.

C

C It uses Crank-Nicolson time integration

C

C For this problem NCRIT=5\*NEY+12 appears to be the right  
formula.

C

PARAMETER (NL=31000,NG=19999,ND=145000)

IMPLICIT REAL\*8 (A-H,O-Z)

C

COMMON /MESH/ NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP

COMMON /MESH1/ INEX2,ISHAPE,NEXP,NXPR,NXX3,IPICK

COMMON /INDATB/ ERRMAX,MAXITE

COMMON /INOUT/ NCR,NLP,NCO,NSA,NPP,NLI,NHI,NTR,NSH

COMMON /INOT/

TSTEP,TIME,TMAX,TIME1,ICONT,NSTEP,IPRD,ISTEP

COMMON /PAR/ RE,FR,CA,ALPHA1,AMP,FREQ,XLDIM,WANU

COMMON /IITT/ ICOUNT

COMMON /FRSCOO/ XFS(NG),H(NG)

COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)

COMMON /XYWGT/ XWGHT(NG),XAGHT(NG),YAGHT(NG),YWGHT(NG)

COMMON /FRON1/

NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA

COMMON /ESSE/ IESSL

COMMON /OLDVAR/

HOLD(ND),YOLD(ND),UOLD(ND),VOLD(ND),POLD(ND)

COMMON /CORR/ AMP1,WNUM,AMPLW,ALAMDA

COMMON /OSCIW1/ XX1,XX2,XX3

COMMON /OSCIW2/ NNX1,NNX2,NNX3

DATA PI /3.141592654/

C

C NCR reads the input data in INPAT which are declared in COMMON  
PAR and INOT

C NLP writes the solution of the current time step

C NCO saves the solution of the steady state problem

C NSA saves the solution at selected time steps for  
postprocessing

C NPP stores the streamlines of the solution for postprocessing

C NLI writes the solution of the current iteration if needed

C NHI saves the free surface profile of converged solutions

C

```

NCR = 14
NLP = 15
NCO = 16
NSA = 17
NLI = 18
NHI = 19
NTR = 20
NPP = 2001

```

C

```

OPEN(UNIT=NCR, FILE='dat', STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=NLP, FILE='out', STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=NCO, FILE='con1', STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=NSA, FILE='save', STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=NLI, FILE='iter', STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=NHI, FILE='post', STATUS='OLD')

```

C

```

CALL GAUSCT
CALL INPAT
CALL MSHSTR
CALL BNDRYC

```

C

```

C ICONT=1 continuation for st.st. problem
C ICONT=2 start of transient problem with st.st. solution as
initial condition
C ICONT=3 continuation of transient problem
C In the transient problem the initial guess for every new time
step is the
C solution of the previous time step

```

C

```

IF (ICONT .EQ. 0) THEN
CALL INIGES
CALL MSHCOO
ELSE
CALL RDTP
END IF

```

C

```

C Start counting the time steps

```

C

```

3 IF (ICONT .GE. 2) THEN
TIME      = TIME + TSTEP
NSTEP     = NSTEP + 1
IF (NSTEP .LE. 500 .OR. (NSTEP/IPRD)*IPRD .EQ. NSTEP)
*WRITE(*,101) NSTEP, TSTEP, TIME
END IF

```

C

```

C Introduce the disturbance by permitting the free surface to
oscillate
C at the entrance during the whole program And following the
development of
C the flow!

```

C

```

      IF (ICONT .EQ. 0)  TIME=0.
      H(1)      = (1. + AMP*COS(2.*PI*FREQ*TIME))
      HX       = AMP*WANU*SIN(2.*PI*FREQ*TIME)
      QX       = 2.*PI*FREQ*AMP*SIN(2.*PI*FREQ*TIME)
      QQ       = (1.+(2.*PI*FREQ*AMP/WANU)*COS(2.*PI*FREQ*TIME))
      DO 99 I   = 1, NY
      Y(I)     = YWGT(I)*H(1)
      V(I)     = (3.*QQ*HX/(H(1)**3.) -
3.*QX/(2.*H(1)**2.))*Y(I)**2.
      *        + (QX/(2.*H(1)**3.) -
3.*QQ*HX/(2.*H(1)**4.))*Y(I)**3.
      U(I)     = 3.*QQ*(Y(I)/H(1)**2)*(1.-Y(I)/(2.*H(1)))
99    CONTINUE

```

C

```

97    CALL ITRATE
      CALL SVSOL

```

C

```

      IF ((NSTEP/IPRD)*IPRD .EQ. NSTEP .AND. ICONT .GE. 2)
      *CALL POSTPR

```

C

C Continue the time dependent problem after steady state solution

C

```

      IF (ICONT .EQ. 0)  ICONT=2

```

C

C Continue the iteration loop for transient problems

C

```

      IF (ICONT .GE. 2) THEN
      ICOUNT   = 1
      IF (TIME .GE. TMAX) THEN
      WRITE(*,*) 'MAXIMUM TIME'
      STOP
      END IF
      CALL TUPDTE
      GO TO 3
      END IF

```

C

```

101  FORMAT(' NSTEP :',I5,5X,'TSTEP :',F10.5,5X,'TIME :',F10.5)

```

C

```

      END

```

C

```

C*****
*****

```

C

```

      SUBROUTINE INPAT

```

C

```

      PARAMETER (NG=19999)

```

C

```

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

C

```

      COMMON /INDATB/ ERRMAX,MAXITE
      COMMON /MESH/   NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP

```

```

COMMON /XYWGT/   XWGHT (NG) , XAGHT (NG) , YAGHT (NG) , YWGHT (NG)
COMMON /INOUT/   NCR, NLP, NCO, NSA, NPP, NLI, NHI, NTR, NSH
COMMON /INOT/
TSTEP, TIME, TMAX, TIME1, ICONT, NSTEP, IPRD, ISTEP
COMMON /PAR/     RE, FR, CA, ALPHA1, AMP, FREQ, XLDIM, WANU
COMMON /ESSE/    IESSL
COMMON /FRSCOO/  XFS (NG) , H (NG)
COMMON /CORR/    AMP1, WNUM, AMPLW, ALAMDA
COMMON /OSCIW1/  XX1, XX2, XX3
COMMON /OSCIW2/  NNX1, NNX2, NNX3

C
DATA    PI, GRA    /3.141592654, 9.81/
C
READ(NCR, *)
READ(NCR, *)      MAXITE, ERRMAX, ICONT, IPRD, IESSL, FREQ
C   WRITE(*, *)    MAXITE, ERRMAX, ICONT, IPRD, IESSL, FREQ
READ(NCR, *)
READ(NCR, *)      RE, ALPHA, SI, RHO, XMU, TSTEP, TMAX, AMP
C   WRITE(*, *)    RE, ALPHA, SI, RHO, XMU, TSTEP, TMAX, AMP
READ(NCR, *)
READ(NCR, *)      AMPLW, ALAMDA
WRITE(*, *)      AMPLW, ALAMDA

C
C Compute the dimensionless numbers for the perturbed case
C
ALPHA1      =    ALPHA*PI/180.
C   RE       =    (2./3.)*RE
QU          =    RE*XMU/RHO
XL          =    (3.*QU*XMU/(RHO*GRA*SIN(ALPHA1)))**(1./3.)
XLDIM       =    1000.*XL
UVEL        =    QU/XL
TREF        =    XL/UVEL
FR          =    (QU**2.)/(GRA*XL**3.)
CA          =    SI/(RHO*XL*UVEL**2.)
FREQ        =    FREQ*TREF
WANU        =    2.*PI*FREQ/3.

C
AMP1=AMPLW/XL
WNUM=(2*PI*XL)/ALAMDA

WRITE(*, '(A20,2F15.8)') 'XL : ', XL
WRITE(*, '(A20,4F12.6)') 'TREF, RE, FR, CA : ', TREF, RE,
FR, CA
WRITE(*, '(A20,F12.6)') 'XLDIM : ', XLDIM
WRITE(*, '(A20,2F15.8)') 'AMP1, WNUM:', AMP1, WNUM

C
READ(NCR, *)
READ(NCR, *)      NEX1, NEX2, NEY
WRITE(*, *)      NEX1, NEX2, NEY
NEX              =    NEX1+NEX2
NX1              =    1+2*NEX1

```

```

      NX          =      1+2*NEX
      NY          =      1+2*NEY
      PRINT*, 'NX, NY : ', NX, NY
C
      READ(NCR,*)
      READ(NCR,*)      XLX1,XLX2,XLX3,NE1,NE2,NE3
      WRITE (*,*)      XLX1,XLX2,XLX3,NE1,NE2,NE3
C
      XX1=0.
      XX2=XLX1/XL
      XX3=(XLX1+XLX2)/XL
      XX4=(XLX1+XLX2+XLX3)/XL

      DX1=(XX2-XX1)/NE1
      DX2=(XX3-XX2)/NE2
      DX3=(XX4-XX3)/NE3
      WRITE (*,*)      DX1,DX2,DX3

      NNX1        =      1+2*NE1
      NNX2        =      1+2*(NE1+NE2)
      NNX3        =      1+2*(NE1+NE2+NE3)

      DO 3 I      =      1, NNX1, 2
      XWGHT(I)    =      XX1 + ((I-1)/2)*DX1
3      CONTINUE
      DO 7 I      =      NNX1, NNX2, 2
      XWGHT(I)    =      XX2 + ((I-NNX1)/2)*DX2
7      CONTINUE
      DO 9 I      =      NNX2, NNX3, 2
      XWGHT(I)    =      XX3 + ((I-NNX2)/2)*DX3
9      CONTINUE
      PRINT*, 'XWGHT(NX)      : ', XLDIM*XWGHT(NX)
C
      READ(NCR,*)
      READ(NCR,*)      (YWGHT(I),I=1,NY,2)
      WRITE(*,*)      (YWGHT(I),I=1,NY,2)
C
      DO 10 I     =      2, NX-1, 2
      XWGHT(I)    =      0.5*(XWGHT(I+1)+XWGHT(I-1))
10     CONTINUE
C
      DO 12 I     =      2, NY-1, 2
      YWGHT(I)    =      0.5*(YWGHT(I+1)+YWGHT(I-1))
12     CONTINUE
C
      DO 14 I     =      1, NX
      XFS(I)      =      XWGHT(I)
14     CONTINUE
C
      RETURN
      END
C

```



```

C*****
*****
C
      FUNCTION NODNOR (I,J)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /MESH/      NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
C
      NODNOR      = (I-1)*NY+J
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      SUBROUTINE MSHSTR
C
      PARAMETER      (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /MESH/      NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
      COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /FRON2/      NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
      COMMON /BDYEL/      NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
C
C NE  : #-of elements
C NH  : #-of nodes
C NP1 : edge (horizontal) #-of unknowns
C NP2 : central (horizontal) #-of unknowns
C NP3 : next to edge #-of unknowns
C
      NE      = NEY*NEX
      NH      = NY*NX
      NHADD   = NH+NX
      NP1     = 3*(NEX+1)*(NEY+1)
      NP2     = 2*NEY*NX
      NP3     = 2*NEX*(NEY+1)
      NP4     = NX
      NP      = NP1+NP2+NP3+NP4
      WRITE(*,'(A25,4I7)') ' NE, NH, NP, NHADD : ', NE, NH, NP,
NHADD
C
C Specify outflow elements
C
      DO 13 I = NE-NEY+1, NE
      NBO(I) = 1
13  CONTINUE
C

```

C Specify free surface elements

C

```
DO 11 I = NEY, NE, NEY
NBL(I) = 1
```

```
11 CONTINUE
```

C

C Specify the #-of nodes NBN(I) and the #-of unknowns NCN(I) in the element

C

```
DO 4 I = 1, NE
NBN(I) = 12
NCN(I) = 25
```

```
4 CONTINUE
```

C

C Specify the degree of freedom in the element

C Midnodes

C

```
DO 5 I = 1, NH
MDF(I) = 2
```

```
5 CONTINUE
```

C

C Fix the edge nodes of quadrilateral elements

C

```
DO 6 I = 1, NX, 2
DO 6 J = 1, NY, 2
L = NODNOR(I,J)
MDF(L) = 3
```

```
6 CONTINUE
```

C

C Free surface nodes

C

```
DO 7 I = NH+1, NHADD
MDF(I) = 1
```

```
7 CONTINUE
```

C

C Calculate global first degree of freedom in each element

C

```
NOPP(1) = 1
DO 71 I = 2, NHADD
NOPP(I) = NOPP(I-1) + MDF(I-1)
```

```
71 CONTINUE
```

C

```
IF (NOPP(NHADD)+MDF(NHADD)-1 .EQ. NP) THEN
PRINT*, 'NP CORRECT!'
ELSE
PRINT*, 'CHECK NP!'
END IF
```

C

```
CALL CALNOP
```

C

```
RETURN
END
```

```

C
C*****
*****
C
      SUBROUTINE CALNOP
C
      PARAMETER (NXNP=313000,NL=31000,ND=145000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /MESH/    NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
      COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /FRON2/  NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
C
C K locates the global node of the bottom left corner of the NK
element
C JJ-1 takes care of the nodes above K
C NY*(II-1) takes care of the adjacent nodes to K
C KK is the local node
C
      DO 5 I      = 1, NEX
      DO 5 J      = 1, NEY
      K          = 2*NY*(I-1) + 1 + (J-1)*2
      NK         = (I-1)*NEY+J
      DO 5 II     = 1, 3
      DO 5 JJ     = 1, 3
      KK         = (II-1)*3+JJ
      NOP(NK, KK) = K + NY*(II-1) + JJ-1
5 CONTINUE
C
C Free surface nodes are added to all elements
C
      DO 6 IK      = 1, NEX
      NK           = IK*NEY
      DO 6 KK      = 10, 12
      NOP(NK, KK)  = NH+2*(IK-1)+KK-9
      DO 6 L       = 1, NEY-1
      NOP(NK-L, KK) = NOP(NK, KK)
6 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      SUBROUTINE BNDRYC
C
      PARAMETER (NXNP=313000,NL=31000,ND=145000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

```

C
COMMON /MESH/    NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
COMMON /FRON2/  NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
COMMON /INOT/   TSTEP,TIME,TMAX,TIME1,ICONT,NSTEP,IPRD,ISTEP
COMMON /ESSE/   IESSL

C
DO 1 I = 1, NP
  NCOD(I) = 0
1 CONTINUE

C
C Datum of pressure
C
  IF (IESSL .EQ. 1) NCOD(NOPP(NH)+2) = 1
  IF (IESSL .EQ. 2) NCOD(NOPP(NH-NY+1)+2) = 1
  IF (IESSL .EQ. 3) NCOD(NOPP(1)+2) = 1
  IF (IESSL .EQ. 4) NCOD(NOPP(NY)+2) = 1

C
C Impose flow rate at the entrance
C
DO 2 J = 1, NY
  NCOD(NOPP(NODNOR(1,J))) = 1
  NCOD(NOPP(NODNOR(1,J))+1) = 1
2 CONTINUE

C
C No slip along the down wall
C
DO 3 I = 1, NX
  NCOD(NOPP(NODNOR(I,1))) = 1
  NCOD(NOPP(NODNOR(I,1))+1) = 1
3 CONTINUE

C
C No slip along the up wall of slit
C
DO 4 I = 1, NX1
  NCOD(NOPP(NODNOR(I,NY))) = 1
  NCOD(NOPP(NODNOR(I,NY))+1) = 1
4 CONTINUE

C
C Fix free surface along up wall of slit
C
DO 5 I = 1, NX1
  NCOD(NOPP(NH+I)) = 1
5 CONTINUE

C
RETURN
END

C
C*****
*****
C

```

```

SUBROUTINE MSHCOO
C
PARAMETER (ND=145000,NG=19999,NL=31000)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
COMMON /MESH/ NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
COMMON /CORR/ AMP1,WNUM,AMPLW,ALAMDA
COMMON /XYWGT/ XWGHT(NG),XAGHT(NG),YAGHT(NG),YWGHT(NG)
COMMON /INOUT/ NCR,NLP,NCO,NSA,NPP,NLI,NHI,NTR,NSH
COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
COMMON /FRSCOO/ XFS(NG),H(NG)
COMMON /OSCIW1/ XX1,XX2,XX3
COMMON /OSCIW2/ NNX1,NNX2,NNX3
C
DO 12 I = 1, NNX1
DO 12 J = 1, NY
L = NODNOR(I,J)
X(L) = XWGHT(I)
Y(L) = YWGHT(J)*H(I)
12 CONTINUE
C
DO 10 I = NNX1, NNX2
DO 10 J = 1, NY
L = NODNOR(I,J)
BPHASE = WNUM*(XWGHT(I)-XWGHT(NNX1))
BCOR = AMP1*COS(BPHASE)-AMP1
X(L) = XWGHT(I)
Y(L) = BCOR + YWGHT(J)*(H(I)-BCOR)
10 CONTINUE
C
DO 11 I = NNX2, NNX3
DO 11 J = 1, NY
L = NODNOR(I,J)
X(L) = XWGHT(I)
Y(L) = YWGHT(J)*H(I)
11 CONTINUE
C
RETURN
END

C
C*****
C*****
C
SUBROUTINE INIGES
C

```



```

PARAMETER (ND=145000,NG=19999,NL=31000)

C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

C
COMMON /MESH/ NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
COMMON /XYWGT/ XWGT(NG),XAGHT(NG),YAGHT(NG),YWGT(NG)
COMMON /PAR/ RE,FR,CA,ALPHA1,AMP,FREQ,XLDIM,WANU
COMMON /FRSCOO/ XFS(NG),H(NG)

C
CC Remember that the initial guess must always satisfy the
conservation
C of mass!
C
      NH      = NX*NY
      DO 10 I = 1, NH
      V(I)     = 0.
      P(I)     = 0.
      U(I)     = 0.
10 CONTINUE

C
C Fix free surface profile
C
      DO 12 I = 1, NX
      H(I)     = YWGT(NY)
12 CONTINUE

C
C Fix u-velocity
C
      DO 11 I = 1, NX
      DO 11 J = 1, NY
      L       = NODNOR(I,J)
      Y(L)    = YWGT(J)*H(I)
      U(L)    = 3.*Y(L)*(1.-Y(L)/2.)

C
C Fix hydrostatic pressure
C
      P(L)     = COS(ALPHA1)*(1.-Y(L))/FR
11 CONTINUE

C
      RETURN
      END

C

C
C*****
*****
C
SUBROUTINE RDTP

C
PARAMETER (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000,NG=19999)

```

```

C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
COMMON /INDATB/ ERRMAX,MAXITE
COMMON /INOUT/  NCR,NLP,NCO,NSA,NPP,NLI,NHI,NTR,NSH
COMMON /INOT/
TSTEP,TIME,TMAX,TIMEL,ICON,T,NSTEP,IPRD,ISTEP
COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
COMMON /FRSCOO/ XFS(NG),H(NG)
COMMON /MESH/   NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
COMMON /OSCIW1/ XX1,XX2,XX3
COMMON /OSCIW2/ NNX1,NNX2,NNX3

C
IF (ICON .EQ. 3)   NNP = NLP
IF (ICON .LE. 2)   NNP = NCO

C
REWIND NNP

C
IF (NNP .EQ. NLP) PRINT*, 'READING FROM OUT'

C
IF (ICON .EQ. 3) READ(NNP,101) TIME,NSTEP
IF (ICON .LE. 2) READ(NNP,*)

C
DO 103 I = 1, NH
READ(NNP,'(17X,3F12.6,2X,1PE11.4)') Y(I),U(I),V(I),P(I)
103 CONTINUE
C
DO 197 I = 1, NX
H(I) = Y(NODNOR(I,NY))
197 CONTINUE
CALL MSHCOO

C
PRINT*, 'DATA HAS BEEN READ'

C
IF (ICON .GE. 2) CALL TUPDTE

C
101 FORMAT (58X,F10.5,I5)
C
RETURN
END

C
C*****
*****
C
SUBROUTINE TUPDTE

C
PARAMETER (ND=145000,NL=31000)

C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

C

```

COMMON /FRON1/
NP, NH, NHADD, NE, NBN (NL), NCN (NL), ND1, NWGA, NELL, NTRA
COMMON /XNDVAR/ X (ND), Y (ND), U (ND), V (ND), P (ND)
COMMON /OLDVAR/
HOLD (ND), YOLD (ND), UOLD (ND), VOLD (ND), POLD (ND)
COMMON /MESH/ NEX1, NEX, NEY, NX, NY, NX1, NXP

```

C

```

DO 11 I = 1, NH
UOLD (I) = U (I)
VOLD (I) = V (I)
POLD (I) = P (I)
YOLD (I) = Y (I)

```

11 CONTINUE

C

```

RETURN
END

```

C

```

C*****
*****

```

C

SUBROUTINE SVSOL

C

PARAMETER (NXNP=313000, ND=145000, NL=31000, NG=19999)

C

IMPLICIT REAL\*8 (A-H, O-Z)

C

CHARACTER FN\*50, C1\*6

C

```

COMMON /CORR/ AMP1, WNUM, AMPLW, ALAMDA
COMMON /INOUT/ NCR, NLP, NCO, NSA, NPP, NLI, NHI, NTR, NSH
COMMON /INOT/
TSTEP, TIME, TMAX, TIME1, ICONT, NSTEP, IPRD, IPERT, ISTEP
COMMON /FRON1/
NP, NH, NHADD, NE, NBN (NL), NCN (NL), ND1, NWGA, NELL, NTRA
COMMON /FRON2/ NOP (NL, 12), NOPP (ND), MDF (ND), NCOD (NXNP)
COMMON /XNDVAR/ X (ND), Y (ND), U (ND), V (ND), P (ND)
COMMON /OLDVAR/
HOLD (ND), YOLD (ND), UOLD (ND), VOLD (ND), POLD (ND)
COMMON /PAR/
RE, FR, CA, ALPHA1, AMP, FREQ, XLDIM, WANU, BETA, NSTP1
COMMON /FRSCOO/ XFS (NG), H (NG)
COMMON /MESH/ NEX1, NEX, NEY, NX, NY, NX1, NXP
COMMON /XYWGT/ XWGHT (NG), XAGHT (NG), YAGHT (NG), YWGHT (NG)
COMMON /MESH1/ INEX2, ISHAPE, NEXP, NXPR, NXX3, IPICK
COMMON /GSPNT/ GPX (9), GPY (9), GWEI (9), GPT (3), GWE (3)
COMMON /JACOB/ XC, XEDA, YC, YEDA, Y1, AY1, CX, CY, EX, EY
COMMON /NODCOO/ XE (9), YE (9), YE1 (9)

```

C

DIMENSION H1 (300000), HEV (300000), PSI (313000)

C

```

C      Computation of streamfunction
C
      EEU = 0.
      DO 19 I = 1, NH
      PSI(I) = 0.
19      CONTINUE
C
      DO 20 I = 1, NEX
      DPSI = 0.
      DO 21 J = 1, NEY
      NELL = (I-1)*NEY + J
      IF(J .EQ. 1) THEN
      LN0 = IABS(NOP(NELL,1))
      PSI(LN0) = 0.
      END IF
      DO 22 NJ = 1, 9
      LN = IABS(NOP(NELL,NJ))
      XE(NJ) = X(LN)
      YE(NJ) = Y(LN)
22      CONTINUE
C
      DO 23 K = 1, 3
      C = -1.
      E = GPT(K)
      CALL TFUNC(C,E)
      CALL DER(C,E)
      WT = GWE(K)*YEDA
      UEV = FEV(U,NELL,EEU)
      DPSI = DPSI + WT*UEV
23      CONTINUE
      LN1 = IABS(NOP(NELL,3))
      PSI(LN1) = DPSI
21      CONTINUE
20      CONTINUE
C
      IF (ICONT .GE. 2) NNP = NLP
      IF (ICONT .LE. 1) NNP = NCO
C
      REWIND NNP
C
C 107
      IF (ICONT .LE. 1) WRITE(NNP,101) RE, AMPLW, ALAMDA
      IF (ICONT .GE. 2) WRITE(NNP,102) RE,CA,FR,TIME,NSTEP,TSTEP

      DO 103 I = 1, NH
      WRITE(NNP,'(I5,4F12.6,2X,1PE11.4,2X,F12.6)') I, X(I), Y(I),
U(I),
*,
V(I), P(I),
PSI(I)
103      CONTINUE
      REWIND NSA
      WRITE(NSA,'(2F12.6)') RE, TIME

```

```

      DO 104 I = 1, NX
      WRITE (NSA, ' (2F12.6) ') XFS(I), H(I)
104  CONTINUE
C
      IF ((NSTEP/IPRD)*IPRD .EQ. NSTEP .AND. ICONT .GE. 2)
      THEN
C
      DO 17 I = 1, 50
      FN(I:I) = ' '
17  CONTINUE
C
      FN(1:5) = 'uvsp-'
      NPP = NPP+1
      OPEN (UNIT=12, FILE='chara-co', STATUS='NEW')
      WRITE (12, ' (F7.2) ') 10*TIME
      REWIND 12
      READ (12, ' (A6) ') C1
      CLOSE (12, STATUS='DELETE')
C
      IF (C1(1:1) .EQ. ' ' .AND. C1(2:2) .NE. ' ') THEN
      FN(6:8) = C1(2:4)
      ELSE IF (C1(1:1) .NE. ' ') THEN
      FN(6:9) = C1(1:4)
      ELSE IF (C1(1:2) .EQ. ' ' .AND. C1(3:3) .NE. ' ') THEN
      FN(6:7) = C1(3:4)
      ELSE IF (C1(1:3) .EQ. ' ' .AND. C1(4:4) .NE. ' ') THEN
      FN(6:6) = C1(4:4)
      END IF
C
      OPEN (UNIT=NPP, FILE=FN, STATUS='NEW')
      WRITE (NPP, 102) RE, CA, FR, TIME, NSTEP, TSTEP
      DO 173 I = 1, NH
      WRITE (NPP, ' (I5,4F12.6,1PE11.4,2X,F12.6) ') I, X(I), Y(I),
U(I),
*      V(I), P(I), PSI(I)
173  CONTINUE
      CLOSE (UNIT=NPP, STATUS='KEEP')
C
      END IF
C
101  FORMAT ('RE, ALPHA, AMPLW, ALAMDA : ', 4F12.6)
102  FORMAT ('RE, CA, FR, TIME, NSTEP, TSTEP : ', 4F10.5, I5, F10.5)
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
C
      SUBROUTINE GAUSCT
C

```



```

      PARAMETER (NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /GSPNT/  GPX(9),GPY(9),GWEI(9),GPT(3),GWE(3)
      COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/  NBL(NL),NBO(NL),IQ, LB
C
      R              = SQRT(.6)
      VAL            = -2.*R
      DO 10 I        = 1, 3
      VAL            = VAL+R
      GPX((I-1)*3+1) = VAL
      GPX((I-1)*3+2) = VAL
      GPX((I-1)*3+3) = VAL
      GPY((I-1)*3+1) = -R
      GPY((I-1)*3+2) = 0.
      GPY((I-1)*3+3) = R
      GPT(I)         = GPY(I)
10 CONTINUE
      GWEI(1)         = 25./81.
      GWEI(2)         = 40./81.
      GWEI(3)         = GWEI(1)
      GWEI(4)         = GWEI(2)
      GWEI(5)         = 64./81.
      GWEI(6)         = GWEI(2)
      GWEI(7)         = GWEI(1)
      GWEI(8)         = GWEI(2)
      GWEI(9)         = GWEI(1)
      GWE(1)          = 5./9.
      GWE(2)          = 8./9.
      GWE(3)          = GWE(1)
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      SUBROUTINE TFUNC(C,E)
C
      PARAMETER (NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/  NBL(NL),NBO(NL),IQ, LB
C

```

```

      PHI(1) = .25*C*(C-1.)*E*(E-1.)
      PHI(2) = .5*C*(C-1.)*(1.-E*E)
      PHI(3) = .25*C*(C-1.)*E*(E+1.)
      PHI(4) = .5*(1.-C*C)*E*(E-1.)
      PHI(5) = (1.-C*C)*(1.-E*E)
      PHI(6) = .5*(1.-C*C)*E*(E+1.)
      PHI(7) = .25*C*(C+1.)*E*(E-1.)
      PHI(8) = .5*C*(C+1.)*(1.-E*E)
      PHI(9) = .25*C*(C+1.)*E*(E+1.)

C
      RETURN
      END

C
C*****
C*****
C
      SUBROUTINE DER(C,E)
C
      PARAMETER (NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /FRON1/
      NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/ NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
      COMMON /JACOB/ XC,XEDA,YC,YEDA,Y1,AY1,CX,CY,EX,EY
      COMMON /NODCOO/ XE(9),YE(9),YE1(9)
C
      PHIC(1) = E*(E-1.)*( .5*C-.25)
      PHIC(2) = (1.-E*E)*(C-.5)
      PHIC(3) = E*(E+1.)*( .5*C-.25)
      PHIC(4) = -C*E*(E-1.)
      PHIC(5) = -2.*C*(1.-E*E)
      PHIC(6) = -C*E*(E+1.)
      PHIC(7) = E*(E-1.)*( .5*C+.25)
      PHIC(8) = (1.-E*E)*(C+.5)
      PHIC(9) = E*(E+1.)*( .5*C+.25)
      PHIE(1) = C*(C-1.)*( .5*E-.25)
      PHIE(4) = (1.-C*C)*(E-.5)
      PHIE(7) = C*(C+1.)*( .5*E-.25)
      PHIE(2) = -E*C*(C-1.)
      PHIE(5) = -2.*E*(1.-C*C)
      PHIE(8) = -E*C*(C+1.)
      PHIE(3) = C*(C-1.)*( .5*E+.25)
      PHIE(6) = (1.-C*C)*(E+.5)
      PHIE(9) = C*(C+1.)*( .5*E+.25)
C
      XC      = 0.
      XEDA    = 0.
      YC      = 0.

```

```

      YEDA      = 0.
      DO 3 I    = 1, IQ
      XC        = XC+XE(I)*PHIC(I)
      XEDA      = XEDA+XE(I)*PHIE(I)
      YC        = YC+YE(I)*PHIC(I)
      YEDA      = YEDA+YE(I)*PHIE(I)
3     CONTINUE
      Y1        = XC*YEDA-YC*XEDA
C
      IF (Y1 .LE. 0.) THEN
      PRINT*, 'PROBLEMS IN ISOPARAMETRIC MAPPING'
      PRINT*, 'Problem in element : ', NELL
      DO 9 I    = 1, 9
      PRINT*, 'XE, YE : ', XE(I), YE(I)
9     CONTINUE
      STOP
      END IF
C
      AY1       = ABS(Y1)
      CX        = YEDA/Y1
      CY        = -XEDA/Y1
      EX        = -YC/Y1
      EY        = XC/Y1
      DO 5 I    = 1, IQ
      PHIX(I)   = PHIC(I)*CX+PHIE(I)*EX
5     PHIY(I)  = PHIC(I)*CY+PHIE(I)*EY
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      SUBROUTINE DER1(C,E)
C
      PARAMETER (NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /SHPF1/  PHX1(9),PHY1(9)
      COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/  NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
      COMMON /JACB1/  XC1,XEDA1,YC1,YEDA1,Y11
      COMMON /NODCOO/ XE(9),YE(9),YE1(9)
C
      DIMENSION      PHIC(9),PHIE(9)
C
      PHIC(1) = E*(E-1.)*(0.5*C-.25)
      PHIC(2) = (1.-E*E)*(C-.5)
      PHIC(3) = E*(E+1.)*(0.5*C-.25)
      PHIC(4) = -C*E*(E-1.)

```

```

PHIC(5) = -2.*C*(1.-E*E)
PHIC(6) = -C*E*(E+1.)
PHIC(7) = E*(E-1.)*(0.5*C+.25)
PHIC(8) = (1.-E*E)*(C+.5)
PHIC(9) = E*(E+1.)*(0.5*C+.25)
PHIE(1) = C*(C-1.)*(0.5*E-.25)
PHIE(4) = (1.-C*C)*(E-.5)
PHIE(7) = C*(C+1.)*(0.5*E-.25)
PHIE(2) = -E*C*(C-1.)
PHIE(5) = -2.*E*(1.-C*C)
PHIE(8) = -E*C*(C+1.)
PHIE(3) = C*(C-1.)*(0.5*E+.25)
PHIE(6) = (1.-C*C)*(E+.5)
PHIE(9) = C*(C+1.)*(0.5*E+.25)

C
XC1      = 0.
XEDA1    = 0.
YC1      = 0.
YEDA1    = 0.
DO 3 I   = 1, IQ
XC1      = XC1+XE(I)*PHIC(I)
XEDA1    = XEDA1+XE(I)*PHIE(I)
YC1      = YC1+YE1(I)*PHIC(I)
YEDA1    = YEDA1+YE1(I)*PHIE(I)
3 CONTINUE
Y11      = XC1*YEDA1-YC1*XEDA1

C
IF (Y11 .LE. 0.) THEN
PRINT*, 'PROBLEMS IN ISOPARAMETRIC MAPPING'
PRINT*, 'Problem in element of previous time step: ', NELL
DO 11 I = 1, 9
PRINT*, 'XE, YE : ', XE(I), YE1(I)
11 CONTINUE
STOP
END IF

C
AY1      = ABS(Y11)
CX       = YEDA1/Y11
CY       = -XEDA1/Y11
EX       = -YC1/Y11
EY       = XC1/Y11
DO 5 I   = 1, IQ
PHX1(I)  = PHIC(I)*CX+PHIE(I)*EX
5 PHY1(I) = PHIC(I)*CY+PHIE(I)*EY

C
RETURN
END

C
C*****
*****
C
SUBROUTINE MAPJAC

```

```

C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /JACOB/   XC,XEDA,YC,YEDA,Y1,AY1,CX,CY,EX,EY
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /DERMAP/  DXDH(9,3),DYDH(9,3)
      COMMON /MPJC/
      DXCDH(3),DXEDH(3),DYCDH(3),DYEDH(3),DCXDH(3),
      *              DCYDH(3),DEXDH(3),DEYDH(3),DJDH(3)
C
C Free surface parametrization
C
      DO 10  J = 1, 3
      DXCDH(J) = 0.
      DXEDH(J) = 0.
      DYCDH(J) = 0.
      DYEDH(J) = 0.
10    CONTINUE
C
      DO 20  J = 1, 3
      DO 20  I = 1, 9
      DXCDH(J) = DXCDH(J) + DXDH(I,J)*PHIC(I)
      DXEDH(J) = DXEDH(J) + DXDH(I,J)*PHIE(I)
      DYCDH(J) = DYCDH(J) + DYDH(I,J)*PHIC(I)
      DYEDH(J) = DYEDH(J) + DYDH(I,J)*PHIE(I)
20    CONTINUE
C
      DO 30  J = 1, 3
      DJDH(J) = DXCDH(J)*YEDA+XC*DYEDH(J)-DYCDH(J)*XEDA-
YC*DXEDH(J)
30    CONTINUE
C
      DO 40  J = 1, 3
      DCXDH(J) = (DYEDH(J)*Y1-YEDA*DJDH(J))/(Y1*Y1)
      DEXDH(J) = (YC*DJDH(J)-DYCDH(J)*Y1)/(Y1*Y1)
      DCYDH(J) = (XEDA*DJDH(J)-DXEDH(J)*Y1)/(Y1*Y1)
      DEYDH(J) = (DXCDH(J)*Y1-XC*DJDH(J))/(Y1*Y1)
40    CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      FUNCTION FEV(VAR,I,EEF)
C
      PARAMETER (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C

```



```

      DIMENSION VAR(ND)
C
      COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
      COMMON /OLDVAR/
      HOLD(ND),YOLD(ND),UOLD(ND),VOLD(ND),POLD(ND)
      COMMON /FRON2/ NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /FRON1/
      NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/ NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
C
      FEV      = 0.
      DO 10 J = 1, IQ
      LN      = IABS(NOP(I,J))
      EEE      = EEF
      IF (EEE .NE. 0. .AND. LB .NE. LN) EEE = 0.
      FEV      = FEV + (VAR(LN)+EEE)*PHI(J)
10 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*****
C*****
C
      FUNCTION FEVX(VAR,I,EEF)
C
      PARAMETER (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      DIMENSION VAR(ND)
C
      COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
      COMMON /FRON2/ NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /FRON1/
      NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/ NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
C
      FEVX      = 0.
      DO 10 J = 1, IQ
      LN      = IABS(NOP(I,J))
      EEE      = EEF
      IF (EEE .NE. 0. .AND. LB .NE. LN) EEE = 0.
      FEVX      = FEVX + (VAR(LN)+EEE)*PHIX(J)
10 CONTINUE
C
      RETURN
      END

```

```

C
C*****
*****
C
      FUNCTION FEVY (VAR, I, EEF)
C
      PARAMETER (NXNP=313000, ND=145000, NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
      DIMENSION VAR (ND)
C
      COMMON /XNDVAR/ X (ND), Y (ND), U (ND), V (ND), P (ND)
      COMMON /FRON2/  NOP (NL, 12), NOPP (ND), MDF (ND), NCOD (NXNP)
      COMMON /SHPFCT/
      PHI (9), PHIX (9), PHIY (9), PHIC (9), PHIE (9), PHIP (4)
      COMMON /FRON1/
      NP, NH, NHADD, NE, NBN (NL), NCN (NL), ND1, NWGA, NELL, NTRA
      COMMON /BDYEL/  NBL (NL), NBO (NL), IQ, LB
C
      FEVY      = 0.
      DO 10 J = 1, IQ
      LN        = IABS (NOP (I, J))
      EEE        = EEF
      IF (EEE .NE. 0. .AND. LB .NE. LN) EEE = 0.
      FEVY      = FEVY + (VAR (LN) + EEE) * PHIY (J)
10 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      FUNCTION FEVX1 (VAR, I, EEF)
C
      PARAMETER (NXNP=313000, ND=145000, NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
      DIMENSION VAR (ND)
C
      COMMON /OLDVAR/
      HOLD (ND), YOLD (ND), UOLD (ND), VOLD (ND), POLD (ND)
      COMMON /FRON2/  NOP (NL, 12), NOPP (ND), MDF (ND), NCOD (NXNP)
      COMMON /SHPF1/  PHX1 (9), PHY1 (9)
      COMMON /FRON1/
      NP, NH, NHADD, NE, NBN (NL), NCN (NL), ND1, NWGA, NELL, NTRA
      COMMON /BDYEL/  NBL (NL), NBO (NL), IQ, LB
C
      FEVX1      = 0.
      DO 10 J = 1, IQ

```

```

      LN      = IABS (NOP (I, J) )
      EEE     = EEF
      IF (EEE .NE. 0. .AND. LB .NE. LN) EEE = 0.
      FEVX1   = FEVX1 + (VAR (LN)+EEE) *PHX1 (J)
10 CONTINUE

C
      RETURN
      END

C
C*****
*****
C
      FUNCTION FEVY1 (VAR, I, EEF)
C
      PARAMETER (NXNP=313000, ND=145000, NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
      DIMENSION VAR (ND)
C
      COMMON /OLDVAR/
      HOLD (ND), YOLD (ND), UOLD (ND), VOLD (ND), POLD (ND)
      COMMON /FRON2/  NOP (NL, 12), NOPP (ND), MDF (ND), NCOD (NXNP)
      COMMON /SHPF1/  PHX1 (9), PHY1 (9)
      COMMON /FRON1/
      NP, NH, NHADD, NE, NBN (NL), NCN (NL), ND1, NWGA, NELL, NTRA
      COMMON /BDYEL/  NBL (NL), NBO (NL), IQ, LB
C
      FEVY1    = 0.
      DO 10 J = 1, IQ
      LN      = IABS (NOP (I, J) )
      EEE     = EEF
      IF (EEE .NE. 0. .AND. LB .NE. LN) EEE = 0.
      FEVY1   = FEVY1 + (VAR (LN)+EEE) *PHY1 (J)
10 CONTINUE

C
      RETURN
      END

C
C*****
*****
C
      FUNCTION FEVC (VAR, I, EEF)
C
      PARAMETER (NXNP=313000, ND=145000, NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
      DIMENSION VAR (ND)
C
      COMMON /XNDVAR/ X (ND), Y (ND), U (ND), V (ND), P (ND)

```

```

COMMON /OLDVAR/
HOLD (ND), YOLD (ND), UOLD (ND), VOLD (ND), POLD (ND)
COMMON /FRON2/ NOP (NL, 12), NOPP (ND), MDF (ND), NCOD (NXNP)
COMMON /SHPFCT/
PHI (9), PHIX (9), PHIY (9), PHIC (9), PHIE (9), PHIP (4)
COMMON /BDYEL/ NBL (NL), NBO (NL), IQ, LB
C
FEVC      = 0.
DO 10 J = 1, 9
LN        = IABS (NOP (I, J))
EEE       = EEF
IF (EEE .NE. 0. .AND. LB .NE. LN) EEE = 0.
FEVC      = FEVC + (VAR (LN) + EEE) * PHIC (J)
10 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C*****
*****
C
FUNCTION FEVE (VAR, I, EEF)
C
PARAMETER (NXNP=313000, ND=145000, NL=31000)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
DIMENSION VAR (ND)
C
COMMON /XNDVAR/ X (ND), Y (ND), U (ND), V (ND), P (ND)
COMMON /OLDVAR/
HOLD (ND), YOLD (ND), UOLD (ND), VOLD (ND), POLD (ND)
COMMON /FRON2/ NOP (NL, 12), NOPP (ND), MDF (ND), NCOD (NXNP)
COMMON /SHPFCT/
PHI (9), PHIX (9), PHIY (9), PHIC (9), PHIE (9), PHIP (4)
COMMON /BDYEL/ NBL (NL), NBO (NL), IQ, LB
C
FEVE      = 0.
DO 10 J = 1, 9
LN        = IABS (NOP (I, J))
EEE       = EEF
IF (EEE .NE. 0. .AND. LB .NE. LN) EEE = 0.
FEVE      = FEVE + (VAR (LN) + EEE) * PHIE (J)
10 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C*****
*****
C
SUBROUTINE TPRES (C, E)

```

```

C
      PARAMETER (NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /FRON1/
      NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/ NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
C
      PHIP(1) = .25*(1.-C)*(1.-E)
      PHIP(2) = .25*(1.-C)*(1.+E)
      PHIP(3) = .25*(1.+C)*(1.-E)
      PHIP(4) = .25*(1.+C)*(1.+E)
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      FUNCTION FEVP(VAR,I,EEF)
C
      PARAMETER (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      DIMENSION VAR(ND)
C
      COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
      COMMON /OLDVAR/
      HOLD(ND),YOLD(ND),UOLD(ND),VOLD(ND),POLD(ND)
      COMMON /FRON2/ NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /FRON1/
      NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /BDYEL/ NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
      COMMON /PRES/ NNPRES(4),IL
C
      FEVP = 0.
      DO 10 K = 1, IL
      LN = IABS(NOP(I,NNPRES(K)))
      EEE = EEF
      IF (EEE.NE.0..AND.LB.NE.LN) EEE = 0.
      FEVP = FEVP + (VAR(LN)+EEE)*PHIP(K)
10 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C

```



```

C*****
*****
C
      SUBROUTINE ABFIND
C
      PARAMETER
      (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000,NCRIT=115,NG=19999)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /DERMAP/ DXDH(9,3),DYDH(9,3)
      COMMON /MPJC/
      DXCDH(3),DXEDH(3),DYCDH(3),DYEDH(3),DCXDH(3),
      *          DCYDH(3),DEXDH(3),DEYDH(3),DJDH(3)
      COMMON /JACOB/ XC,XEDA,YC,YEDA,Y1,AY1,CX,CY,EX,EY
      COMMON /INDATB/ ERRMAX,MAXITE
      COMMON /MESH/ NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
      COMMON /INOUT/ NCR,NLP,NCO,NSA,NPP,NLI,NHI,NTR,NSH
      COMMON /GSPNT/ GPX(9),GPY(9),GWEI(9),GPT(3),GWE(3)
      COMMON /INOT/
      TSTEP,TIME,TMAX,TIME1,ICONT,NSTEP,IPRD,ISTEP
      COMMON /FRON1/
      NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /FRON2/ NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
      COMMON /FRON3/ R1(NXNP),SK(NXNP),AA(25,25)
      COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
      COMMON /OLDVAR/
      HOLD(ND),YOLD(ND),UOLD(ND),VOLD(ND),POLD(ND)
      COMMON /SHPFCT/
      PHI(9),PHIX(9),PHIY(9),PHIC(9),PHIE(9),PHIP(4)
      COMMON /BDYEL/ NBL(NL),NBO(NL),IQ,LB
      COMMON /NODCOO/ XE(9),YE(9),YE1(9)
      COMMON /PAR/ RE,FR,CA,ALPHA1,AMP,FREQ,XLDIM,WANU
      COMMON /PRES/ NNPRES(4),IL
      COMMON /RES1/ RF(NXNP)
      COMMON /FRSCOO/ XFS(NG),H(NG)
      COMMON /XYWGT/ XWGHT(NG),XAGHT(NG),YAGHT(NG),YWGHT(NG)
      COMMON /SHPF1/ PHX1(9),PHY1(9)
      COMMON /JACB1/ XC1,XEDA1,YC1,YEDA1,Y11
      COMMON /OSCIW1/ XX1,XX2,XX3
      COMMON /OSCIW2/ NNX1,NNX2,NNX3
C
      DIMENSION R(31,31)
      DIMENSION IU(9),IV(9),IP(4),IH(3),NNFRSF(3)
      DIMENSION DXX(3),DYY(3),DXY(3),DYX(3),DYTDH(3)
C
      DATA IU /1,4,6,9,11,13,15,18,20/
      DATA IV /2,5,7,10,12,14,16,19,21/
      DATA IP /3,8,17,22/
      DATA IH /23,24,25/
      DATA NNPRES /1,3,7,9/

```

```

DATA NNFRSF /10,11,12/
C
  NGP          = 9
  IQ           = 9
  IL           = 4
  EEU          = 0.
  EEV          = 0.
  EEX          = 0.
  EEY          = 0.
  EEP          = 0.
  EEOLD        = 0.
C
C Initialize Jacobian ,R, and remember residual ,R1, is
initialized in FRONT
C
  DO 101 I     = 1, 31
  DO 101 J     = 1, 31
  R(I,J)      = 0.
101 CONTINUE
C
C Give global coordinates to the master element for isoparametric
mapping
C
  DO 102 J     = 1, IQ
  LN          = IABS(NOP(NELL,J))
  XE(J)       = X(LN)
  YE(J)       = Y(LN)
  YE1(J)      = YOLD(LN)
102 CONTINUE
C
C Compute the derivative of y wrt h for free surface
parametrization
C
  NNELL       = (NELL/NEY)*NEY
  IF (NELL .LE. NEY)                IF = NELL
  IF (NELL .GT. NEY .AND. NELL .NE. NNELL) IF = NELL-NNELL
  IF (NELL .EQ. NNELL)              IF = NEY
  DO 52 I     = 1, 3
  DO 52 J     = 1, 3
  II          = (I-1)*3+J
  DYDH(II,I) = YWGHT(2*(IF-1)+J)
52 CONTINUE
C
  IF (ICONT .LE. 1) THEN
  XIM         = 1.
  ELSE
  XIM         = 1./2.
  END IF
C
C Assembly of R and R1
C
  DO 103 K     = 1, NGP

```

```

C          = GPX (K)
E          = GPY (K)
CALL TFUNC (C, E)
CALL TPRES (C, E)
CALL DER (C, E)
CALL MAPJAC
UEVX      = FEVX (U, NELL, EEU)
UEVY      = FEVY (U, NELL, EEU)
VEVX      = FEVX (V, NELL, EEV)
VEVY      = FEVY (V, NELL, EEV)
UEV       = FEV (U, NELL, EEU)
VEV       = FEV (V, NELL, EEV)
PEV       = FEVP (P, NELL, EEP)
UEVC      = FEVC (U, NELL, EEU)
UEVE      = FEVE (U, NELL, EEU)
VEVC      = FEVC (V, NELL, EEV)
VEVE      = FEVE (V, NELL, EEV)
DO 161 J   = 1, 3
DXX (J)    = UEVC*DCXDH (J) + UEVE*DEXDH (J)
DYY (J)    = VEVC*DCYDH (J) + VEVE*DEYDH (J)
DXY (J)    = UEVC*DCYDH (J) + UEVE*DEYDH (J)
DYX (J)    = VEVC*DCXDH (J) + VEVE*DEXDH (J)
161 CONTINUE
WE         = GWEI (K) *Y1
WE1        = GWEI (K)
IF (ICONT .GE. 2) THEN
CALL DER1 (C, E)
UEVOLD    = FEV (UOLD, NELL, EEOLD)
VEVOLD    = FEV (VOLD, NELL, EEOLD)
PEVOLD    = FEVP (POLD, NELL, EEOLD)
UOVX      = FEVX1 (UOLD, NELL, EEOLD)
UOVY      = FEVY1 (UOLD, NELL, EEOLD)
VOVX      = FEVX1 (VOLD, NELL, EEOLD)
VOVY      = FEVY1 (VOLD, NELL, EEOLD)
YEV       = FEV (Y, NELL, EEY)
YEVOLD    = FEV (YOLD, NELL, EEOLD)
DUDTT     = (UEV-UEVOLD) /TSTEP
DVDTT     = (VEV-VEVOLD) /TSTEP
DYDTT     = (YEV-YEVOLD) /TSTEP
DUDTP     = DUDTT-UEVY*DYDTT
DVDTP     = DVDTT-VEVY*DYDTT
DO 162 I   = 1, 3
DYTDH (I) = 0.
DO 162 J   = 1, 9
DYTDH (I) = DYTDH (I) +DYDH (J, I) *PHI (J)
162 CONTINUE
END IF
C
C Compute -Ru, -Rv
C
DO 104 KI  = 1, IQ
IX         = NOPP (IABS (NOP (NELL, KI) ) )

```

```

      IY          = IX+1
      R1(IX)      = R1(IX) - XIM*WE* ((UEV*UEVX+VEV*UEVY)*PHI(KI)
+
      *
      (-PEV+(2./RE)*UEVX)*PHIX(KI)
+
      *
      (1./RE)*(UEVY+VEVX)*PHIY(KI)
-
      *
      (1./FR)*SIN(ALPHA1)*PHI(KI))
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IX)      = R1(IX) -
XIM*WE* ((UEVOLD*UOVX+VEVOLD*UOVY)*PHI(KI) +
      *
      (-
PEVOLD+(2./RE)*UOVX)*PHX1(KI)  +
      *
      (1./RE)*(UOVY+VOVX)*PHY1(KI)
-
      *
      (1./FR)*SIN(ALPHA1)*PHI(KI))
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IX)      = R1(IX) - WE*DUDTP*PHI(KI)
C
      R1(IY)      = R1(IY) - XIM*WE* ((UEV*VEVX+VEV*VEVY)*PHI(KI)
+
      *
      (-PEV+(2./RE)*VEVY)*PHIY(KI)
+
      *
      (1./RE)*(UEVY+VEVX)*PHIX(KI)
+
      *
      (1./FR)*COS(ALPHA1)*PHI(KI))
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IY)      = R1(IY) -
XIM*WE* ((UEVOLD*VOVX+VEVOLD*VOVY)*PHI(KI) +
      *
      (-
PEVOLD+(2./RE)*VOVY)*PHY1(KI)  +
      *
      (1./RE)*(UOVY+VOVX)*PHX1(KI)
+
      *
      (1./FR)*COS(ALPHA1)*PHI(KI))
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IY)      = R1(IY) - WE*DVDTP*PHI(KI)
C
C Compute the derivatives of Ru and Rv wrt u and v
C
      DO 105 KJ = 1, IQ
      KKI      = IV(KI)
      KKJ      = IU(KJ)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + XIM*WE* (PHI(KJ)*VEVX*PHI(KI)
+
      *
      (1./RE)*PHIY(KJ)*PHIX(KI))
      KKJ      = IV(KJ)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) +
XIM*WE* ((UEV*PHIX(KJ)+VEV*PHIY(KJ)  +
      *
      VEVY*PHI(KJ))*PHI(KI)
+
      *
      (2./RE)*PHIY(KJ)*PHIY(KI)
+

```

```

*
* (1./RE)*PHIX(KJ)*PHIX(KI))
  IF (ICONT .GE. 2)
    *R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE*(PHI(KJ)/TSTEP-
PHIY(KJ)*DYDDT)*
*
PHI(KI)
C
  KKI      = IU(KI)
  KKJ      = IU(KJ)
  R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) +
XIM*WE*((VEV*PHIY(KJ)+UEV*PHIX(KJ) +
*
UEVX*PHI(KJ))*PHI(KI)
+
*
(2./RE)*PHIX(KJ)*PHIX(KI)
+
*
(1./RE)*PHIY(KJ)*PHIY(KI))
  IF (ICONT .GE. 2)
    *R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE*(PHI(KJ)/TSTEP-
PHIY(KJ)*DYDDT)*
*
PHI(KI)
  KKJ      = IV(KJ)
  R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + XIM*WE*(PHI(KJ)*UEVY*PHI(KI)
+
*
(1./RE)*PHIX(KJ)*PHIY(KI))
105  CONTINUE
C
C
C Compute the derivatives of Ru and Rv wrt p
C
  DO 106 KJ = 1, IL
    KKI      = IU(KI)
    KKJ      = IP(KJ)
    R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) - XIM*WE*PHIP(KJ)*PHIX(KI)
C
  KKI      = IV(KI)
  R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) - XIM*WE*PHIY(KI)*PHIP(KJ)
106  CONTINUE
C
C Compute the derivatives of Ru and Rv wrt h
C
  DO 156 KJ = 1, 3
    DPX      = PHIC(KI)*DYEDH(KJ)-PHIE(KI)*DYCDH(KJ)
    DPY      = PHIE(KI)*DXCDH(KJ)-PHIC(KI)*DXEDH(KJ)
C
  KKI      = IU(KI)
  KKJ      = IH(KJ)
  R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) +
XIM*WE1*((UEV*DXX(KJ)+VEV*DXY(KJ))*Y1 +
*
(UEV*UEVX+VEV*UEVY)*DJDH(KJ))*PHI(KI) +

```



```

      *
      (2./RE)*DXX(KJ)*PHIX(KI)*Y1
+
      *
      (-PEV+(2./RE)*UEVX)*DPX
+
      *
      (1./RE)*(DXY(KJ)+DYX(KJ))*PHIY(KI)*Y1 +
      *
      (1./RE)*(UEVY+VEVX)*DPY
-
      *
      (1./FR)*SIN(ALPHA1)*DJDH(KJ)*PHI(KI))
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE1*(DUDTP*DJDH(KJ) -
      (DXY(KJ)*DYDTT +
      *
      UEVY*DYTDH(KJ)/TSTEP)*Y1)*PHI(KI)
C
      KKI = IV(KI)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) +
XIM*WE1*((UEV*DYX(KJ)+VEV*DYY(KJ))*Y1 +
      *
      (UEV*VEVX+VEV*VEVY)*DJDH(KJ))*PHI(KI) +
      *
      (2./RE)*DYY(KJ)*PHIY(KI)*Y1
+
      *
      (-PEV+(2./RE)*VEVY)*DPY
+
      *
      (1./RE)*(DXY(KJ)+DYX(KJ))*PHIX(KI)*Y1 +
      *
      (1./RE)*(UEVY+VEVX)*DPX
+
      *
      (1./FR)*COS(ALPHA1)*DJDH(KJ)*PHI(KI))
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE1*(DVDTP*DJDH(KJ) -
      (DYY(KJ)*DYDTT +
      *
      VEVY*DYTDH(KJ)/TSTEP)*Y1)*PHI(KI)
156 CONTINUE
C
104 CONTINUE
C
C Compute -Rc
C
      DO 107 KI = 1, IL
      IC = NOPP(IABS(NOP(NELL, NNPRES(KI)))) + 2
      R1(IC) = R1(IC) - WE*PHIP(KI)*(UEVX+VEVY)
C
C Compute the derivatives of Rc wrt u and v
C
      DO 117 KJ = 1, IQ
      KKI = IP(KI)
      KKJ = IU(KJ)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE*PHIP(KI)*PHIX(KJ)
      KKJ = IV(KJ)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE*PHIP(KI)*PHIY(KJ)

```

```

117 CONTINUE
C
C Compute the derivatives of Rc wrt h
C
      DO 118 KJ = 1, 3
      KKJ = IH(KJ)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE1 * ((DXX(KJ) + DYY(KJ)) * Y1 +
      *
      (UEVX + VEY) * DJDH(KJ)) * PHIP(KI)
118 CONTINUE
C
107 CONTINUE
C
103 CONTINUE
C
C Free boundary condition at the outflow
C
      IF (NBO(NELL) .EQ. 1) THEN
C
      DO 108 K = 1, 3
      C = 1.
      E = GPT(K)
      CALL TFUNC(C, E)
      CALL TPRES(C, E)
      CALL DER(C, E)
      CALL MAPJAC
      UEVX = FEVX(U, NELL, EEU)
      UEVY = FEVY(U, NELL, EEU)
      VEVX = FEVX(V, NELL, EEV)
      PEV = FEVP(P, NELL, EEP)
      IF (ICONT .GE. 2) THEN
      CALL DER1(C, E)
      PEVOLD = FEVP(POLD, NELL, EEOLD)
      UOVX = FEVX1(UOLD, NELL, EEOLD)
      UOVY = FEVY1(UOLD, NELL, EEOLD)
      VOVX = FEVX1(VOLD, NELL, EEOLD)
      END IF
      UEVC = FEVC(U, NELL, EEU)
      UEVE = FEVE(U, NELL, EEU)
      VEVC = FEVC(V, NELL, EEV)
      VEVE = FEVE(V, NELL, EEV)
      DO 171 J = 1, 3
      DXX(J) = UEVC * DCXDH(J) + UEVE * DEXDH(J)
      DYY(J) = VEVC * DCYDH(J) + VEVE * DEYDH(J)
      DXY(J) = UEVC * DCYDH(J) + UEVE * DEYDH(J)
      DYX(J) = VEVC * DCXDH(J) + VEVE * DEXDH(J)
171 CONTINUE
      WT = GWE(K) * YEDA
C
C Add the appropriate contributions to -Ru and -Rv
C
      DO 109 KI = 7, 9

```

```

      IX          = NOPP ( IABS ( NOP ( NELL, KI ) ) )
      IY          = IX+1
      R1 (IX)     = R1 (IX) + XIM*WT* (-PEV+ (2./RE) *UEVX) *PHI (KI)
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1 (IX)     = R1 (IX) + XIM*WT* (-PEVOLD+ (2./RE) *UOVX) *PHI (KI)
      R1 (IY)     = R1 (IY) + XIM*WT* (1./RE) * (UEVY+VEVX) *PHI (KI)
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1 (IY)     = R1 (IY) + XIM*WT* (1./RE) * (UOVY+VOVX) *PHI (KI)
C
C Computation of derivatives for volume integrals
C
      DO 110 KJ = 1, IQ
      KKI         = IU (KI)
      KKJ         = IU (KJ)
      R (KKI, KKJ) = R (KKI, KKJ) - XIM*WT* (2./RE) *PHIX (KJ) *PHI (KI)
C
      KKI         = IV (KI)
      KKJ         = IV (KJ)
      R (KKI, KKJ) = R (KKI, KKJ) - XIM*WT* (1./RE) *PHIX (KJ) *PHI (KI)
      KKJ         = IU (KJ)
      R (KKI, KKJ) = R (KKI, KKJ) - XIM*WT* (1./RE) *PHIY (KJ) *PHI (KI)
110  CONTINUE
C
      DO 111 KJ = 1, IL
      KKI         = IU (KI)
      KKJ         = IP (KJ)
      R (KKI, KKJ) = R (KKI, KKJ) + XIM*WT*PHIP (KJ) *PHI (KI)
111  CONTINUE
C
      DO 112 KJ = 1, 3
      KKI         = IU (KI)
      KKJ         = IH (KJ)
      R (KKI, KKJ) = R (KKI, KKJ) - GWE (K) * ( (-
PEV+ (2./RE) *UEVX) *DYEDH (KJ) +
      *
      (2./RE) *DXX (KJ) *YEDA) *PHI (KI) *XIM
      KKI         = IV (KI)
      R (KKI, KKJ) = R (KKI, KKJ) -
GWE (K) * (1./RE) * ( (DXY (KJ) +DYX (KJ) ) *YEDA+
      *
      (UEVY+VEVX) *DYEDH (KJ) ) *PHI (KI) *XIM
112  CONTINUE
C
109  CONTINUE
C
108  CONTINUE
C
      END IF
C
C Kinematic condition of no-mass penetration and natural boundary
condition
C along the free surface

```

```

C
      IF (NBL(NELL) .EQ. 1) THEN
C
      DO 600 K = 1, 3
      E = 1.
      C = GPT(K)
      CALL TFUNC(C,E)
      CALL DER(C,E)
      CALL MAPJAC
      UEV = FEV(U,NELL,EEU)
      VEV = FEV(V,NELL,EEV)
      IF (ICONT .GE. 2) THEN
      CALL DER1(C,E)
      HEV = FEV(Y,NELL,EEY)
      HEVOLD = FEV(YOLD,NELL,EEOLD)
      UEVOLD = FEV(UOLD,NELL,EEOLD)
      VEVOLD = FEV(VOLD,NELL,EEOLD)
      END IF
      SQT2 = XC*XC+YC*YC
      SQT = SQRT(SQT2)
      SQT1 = SQRT(XC1*XC1+YC1*YC1)
      SQT3 = SQT*SQT2
      WE = GWE(K)
C
C Stress equilibrium as natural boundary condition along free
surface
C
      DO 601 KI = 3, 9, 3
      IX = NOPP(IABS(NOP(NELL,KI)))
      IY = IX+1
      R1(IX) = R1(IX) - XIM*WE*CA*XC*PHIC(KI)/SQT
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IX) = R1(IX) - XIM*WE*CA*XC1*PHIC(KI)/SQT1
      R1(IY) = R1(IY) - XIM*WE*CA*YC*PHIC(KI)/SQT
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IY) = R1(IY) - XIM*WE*CA*YC1*PHIC(KI)/SQT1
C
      DO 601 KJ = 1, 3
      KKI = IU(KI)
      KKJ = IH(KJ)
      R(KKI,KKJ) = R(KKI,KKJ) + XIM*WE*CA*YC*(YC*DXCDH(KJ) -
      * XC*DYCDH(KJ))*PHIC(KI)/SQT3
      KKI = IV(KI)
      R(KKI,KKJ) = R(KKI,KKJ) + XIM*WE*CA*XC*(XC*DYCDH(KJ) -
      * YC*DXCDH(KJ))*PHIC(KI)/SQT3
601 CONTINUE
C
C Add kinematic condition to the residual vector
C
      DO 602 KI = 1, 3
      IK = NOPP(IABS(NOP(NELL,NNFRSF(KI))))
      R1(IK) = R1(IK) - XIM*WE*(YC*UEV-XC*VEV)*PHI(3*KI)

```

```

      IF (ICONT .GE. 2)
        *R1(IK)      = R1(IK) - XIM*WE*(YC1*UEVOLD-
XC1*VEVOLD)*PHI(3*KI)
      IF (ICONT .GE. 2)
        *R1(IK)      = R1(IK) - WE*XC*(HEV-HEVOLD)*PHI(3*KI)/TSTEP
      DO 603 KJ      = 1, 9
      KKI            = IH(KI)
      KKJ            = IU(KJ)
      R(KKI, KKJ)    = R(KKI, KKJ) + XIM*WE*YC*PHI(KJ)*PHI(3*KI)
      KKJ            = IV(KJ)
      R(KKI, KKJ)    = R(KKI, KKJ) - XIM*WE*XC*PHI(KJ)*PHI(3*KI)
603  CONTINUE
      DO 604 KJ      = 1, 3
      KKJ            = IH(KJ)
      R(KKI, KKJ)    = R(KKI, KKJ) + XIM*WE*(UEV*DYCDH(KJ) -
*                      VEV*DXCDH(KJ))*PHI(3*KI)
      IF (ICONT .GE. 2)
        *R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + WE*(XC*PHI(3*KJ)+DXCDH(KJ)*(HEV-
HEVOLD))
*                      *PHI(3*KI)/TSTEP
604  CONTINUE
602  CONTINUE
C
600  CONTINUE
C
      END IF
C
C Don't forget the contributions to the stress equilibrium at the
corners
C of the first and the last free surface element
C
      IF (NELL .EQ. NEY) THEN
      E          = 1.
      C          = -1.
      CALL TFUNC(C,E)
      CALL DER(C,E)
      CALL MAPJAC
      IF (ICONT .GE. 2)
      *CALL DER1(C,E)
      SQT2       = XC*XC+YC*YC
      SQT        = SQRT(SQT2)
      SQT1       = SQRT(XC1*XC1+YC1*YC1)
      SQT3       = SQT*SQT2
      IX         = NOPP(IABS(NOP(NELL,3)))
      IY         = IX+1
      R1(IX)     = R1(IX) - XIM*CA*XC/SQT
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IX)     = R1(IX) - XIM*CA*XC1/SQT1
      R1(IY)     = R1(IY) - XIM*CA*YC/SQT
      IF (ICONT .GE. 2)
      *R1(IY)     = R1(IY) - XIM*CA*YC1/SQT1
      DO 671 KJ  = 1, 3

```



```

      KKI          = IU(3)
      KKJ          = IH(KJ)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + XIM*CA*YC*(YC*DXCDH(KJ) -
*                  XC*DYCDH(KJ)) / SQT3
      KKI          = IV(3)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) + XIM*CA*XC*(XC*DYCDH(KJ) -
*                  YC*DXCDH(KJ)) / SQT3
671  CONTINUE
      END IF
      IF (NELL .EQ. NE) THEN
      E          = 1.
      C          = 1.
      CALL TFUNC(C,E)
      CALL DER(C,E)
      CALL MAPJAC
      IF (ICONT .GE. 2)
*CALL DER1(C,E)
      SQT2       = XC*XC+YC*YC
      SQT        = SQRT(SQT2)
      SQT1       = SQRT(XC1*XC1+YC1*YC1)
      SQT3       = SQT*SQT2
      IX         = NOPP(IABS(NOP(NELL,9)))
      IY         = IX+1
      R1(IX)     = R1(IX) + XIM*CA*XC/SQT
      IF (ICONT .GE. 2)
*R1(IX)       = R1(IX) + XIM*CA*XC1/SQT1
      R1(IY)     = R1(IY) + XIM*CA*YC/SQT
      IF (ICONT .GE. 2)
*R1(IY)       = R1(IY) + XIM*CA*YC1/SQT1
      DO 672 KJ = 1, 3
      KKI        = IU(9)
      KKJ        = IH(KJ)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) - XIM*CA*YC*(YC*DXCDH(KJ) -
*                  XC*DYCDH(KJ)) / SQT3
      KKI        = IV(9)
      R(KKI, KKJ) = R(KKI, KKJ) - XIM*CA*XC*(XC*DYCDH(KJ) -
*                  YC*DXCDH(KJ)) / SQT3
672  CONTINUE
      END IF
C
C Tranfer the Jacobian to the Frontal solver
C
      DO 172 I   = 1, 25
      DO 172 J   = 1, 25
      AA(J,I)    = R(J,I)
172  CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****

```

```

C      SUBROUTINE POSTPR
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      PARAMETER (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000,NG=19999)
C
C      CHARACTER          FN*50,C1*6
C
C      COMMON /MESH/      NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
C      COMMON /INOUT/     NCR,NLP,NCO,NSA,NPP,NLI,NHI,NTR,NSH
C      COMMON /INOT/
C      TSTEP,TIME,TMAX,TIME1,ICONT,NSTEP,IPRD,ISTEP
C      COMMON /FRON1/
C      NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
C      COMMON /XNDVAR/   X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
C      COMMON /PAR/      RE,FR,CA,ALPHA1,AMP,FREQ,XLDIM,WANU
C      COMMON /FRSCOO/   XFS(NG),H(NG)
C      COMMON /OSCIW1/   XX1,XX2,XX3
C      COMMON /OSCIW2/   NNX1,NNX2,NNX3
C      COMMON /NODCOO/   XE(9),YE(9),YE1(9)
C      COMMON /JACOB/    XC,XEDA,YC,YEDA,Y1,AY1,CX,CY,EX,EY
C
C      DO 17 I = 1, 50
C      FN(I:I) = ' '
17  CONTINUE
C
C      FN(1:5) = 'time-'
C      NPP      = NPP+1
C      OPEN(UNIT=12,FILE='chara-co',STATUS='NEW')
C      WRITE(12,'(F7.2)') 10*TIME
C      REWIND 12
C      READ(12,'(A6)') C1
C      CLOSE(12,STATUS='DELETE')
C
C      IF (C1(1:1) .EQ. ' ' .AND. C1(2:2) .NE. ' ') THEN
C      FN(6:8) = C1(2:4)
C      ELSE IF (C1(1:1) .NE. ' ') THEN
C      FN(6:9) = C1(1:4)
C      ELSE IF (C1(1:2) .EQ. ' ' .AND. C1(3:3) .NE. ' ') THEN
C      FN(6:7) = C1(3:4)
C      ELSE IF (C1(1:3) .EQ. ' ' .AND. C1(4:4) .NE. ' ') THEN
C      FN(6:6) = C1(4:4)
C      END IF
C
C      OPEN(UNIT=NPP,FILE=FN,STATUS='NEW')
C
C      WRITE(NPP,305) RE, TIME, XLDIM
C      DO 153 I = NX1, NX
C      WRITE(NPP,'(2F12.6)') XLDIM*XFS(I), H(I)
153  CONTINUE
305  FORMAT('RE : ', F12.6, ' TIME : ', F12.6, 'XLDIM : ',
F12.6)

```

```

C
      CLOSE (UNIT=NPP, STATUS='KEEP')
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      SUBROUTINE UPDATE
C
      PARAMETER
      (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000,NCRIT=115,NG=19999)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON /INOT/
      TSTEP, TIME, TMAX, TIME1, ICONT, NSTEP, IPRD, ISTEP
      COMMON /INOUT/  NCR, NLP, NCO, NSA, NPP, NLI, NHI, NTR, NSH
      COMMON /INDATB/ ERRMAX, MAXITE
      COMMON /MESH/   NEX1, NEX, NEY, NX, NY, NX1, NXP
      COMMON /FRON1/
      NP, NH, NHADD, NE, NBN (NL), NCN (NL), ND1, NWGA, NELL, NTRA
      COMMON /FRON2/  NOP (NL, 12), NOPP (ND), MDF (ND), NCOD (NXNP)
      COMMON /FRON3/  R1 (NXNP), SK (NXNP), AA (25, 25)
      COMMON /XNDVAR/ X (ND), Y (ND), U (ND), V (ND), P (ND)
      COMMON /ER/     ERR
      COMMON /PAR/    RE, FR, CA, ALPHA1, AMP, FREQ, XLDIM, WANU
      COMMON /ITIT/   ITER
      COMMON /FRSCOO/ XFS (NG), H (NG)
      COMMON /OSCIW1/ XX1, XX2, XX3
      COMMON /OSCIW2/ NNX1, NNX2, NNX3

C
C      ERR_MAX= 0.
C      R1_MAX = 0.
C      I_ERR = 1
C      I_R1 = 1
C      DO 10 I = 1, NP
C      IF(SK(I).GT.ERR_MAX) THEN
C      ERR_MAX = SK(I)
C      I_ERR = I
C      END IF
C
C      IF(R1(I).GT.R1_MAX) THEN
C      R1_MAX = R1(I)
C      I_R1 = I
C      END IF
C 10  CONTINUE
C      PRINT*, 'I_ERR=', I_ERR, '      I_R1=', I_R1
C      PRINT*, 'ERR_MAX=', ERR_MAX, '      R1_MAX=', R1_MAX
C

```

```

ERR      = 0.
DO 50 I = 1, NH
CAN      = SK(NOPP(I))
CAN2     = CAN*CAN
U(I)     = U(I)+CAN
IF (CAN2 .GT. ERR) ERR = CAN2
CAN      = SK(NOPP(I)+1)
CAN2     = CAN*CAN
V(I)     = V(I)+CAN
IF (CAN2 .GT. ERR) ERR = CAN2
IF (MDF(I) .EQ. 3) THEN
CAN      = SK(NOPP(I)+2)
CAN2     = CAN*CAN
IF (CAN2 .GT. ERR) ERR = CAN2
P(I)     = P(I)+CAN
END IF
50 CONTINUE
DO 51 I = NH+1, NHADD
CAN      = SK(NOPP(I))
CAN2     = CAN*CAN
IF (CAN2 .GT. ERR) ERR = CAN2
H(I-NH) = H(I-NH)+CAN
51 CONTINUE
C
ERR      = SQRT(ERR)
C
CALL MSHCOO
C
RETURN
END
C
C*****
*****
C
SUBROUTINE ITRATE
C
PARAMETER (NXNP=313000,ND=145000,NL=31000,NG=19999)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
COMMON /INDATB/ ERRMAX,MAXITE
COMMON /INOUT/  NCR,NLP,NCO,NSA,NPP,NLI,NHI,NTR,NSH
COMMON /INOT/
TSTEP,TIME,TMAX,TIME1,ICONT,NSTEP,IPRD,ISTEP
COMMON /PAR/    RE,FR,CA,ALPHA1,AMP,FREQ,XLDIM,WANU
COMMON /ER/     ERR
COMMON /IITT/   ICOUNT
COMMON /FRON2/  NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
COMMON /XNDVAR/ X(ND),Y(ND),U(ND),V(ND),P(ND)
COMMON /ITIT/   ITER

```

```

COMMON /FRSCOO/ XFS(NG),H(NG)
COMMON /MESH/ NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
C
C Correct coding of NOP array before first entrance to FRONT
C
NTRA = 1
ITER = 0
IF (ICOUNT .EQ. 1) NTRA=0
C
2 DO 5 I = 1, NP
  IF(NCOD(I) .EQ. 2) NCOD(I)=1
5 CONTINUE
C
CALL FRONT
C
NTRA = 0
ITER = ITER+1
C
CALL UPDATE
IF (NSTEP .LE. 500 .OR. (NSTEP/IPRD)*IPRD .EQ. NSTEP)
*WRITE(*,'(A15,I5,3X,1PE11.4)') 'ITER, ERR : ', ITER, ERR
C
IF (ERR .LE. ERRMAX .AND. (NSTEP/IPRD)*IPRD .EQ.
NSTEP
*.OR. ERR .LE. ERRMAX .AND. NSTEP .LE. 500)
*WRITE(*,*) 'CONVERGENCE'
IF (ITER .LT. MAXITE .AND. ERR .GT. ERRMAX) GO TO 2
IF (ITER .EQ. MAXITE .AND. ERR .GT. ERRMAX) STOP
C
RETURN
END
C
C*****
*****
C
SUBROUTINE FRONT
C
PARAMETER (NXNP=313000,NL=31000,ND=145000,NCRIT=115,
! NMAX=NCRIT+25)
PARAMETER (NCRAY=27000000)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
DIMENSION EQ(NMAX,NMAX),QQ(NMAX),PVKOL(NMAX),JMOD(NMAX),
* LDEST(NCRIT),KDEST(NCRIT),NK(NCRIT),LHED(NMAX),
* KHED(NMAX),KPIV(NMAX),LPIV(NMAX)
C
COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
COMMON /FRON2/ NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
COMMON /FRON3/ R1(NXNP),SK(NXNP),AA(25,25)
COMMON /FRON4/ CRAY(NCRAY)

```



```

COMMON /MESH/    NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
C
MWGA = 0
ICE  = 0
ICE1 = 0
ICE5 = 0
C
C PREFRONT
C FIND LAST APPEARANCE OF EACH NODE
C
C Check midnodes first!
C
IF (NTRA .EQ. 1) THEN
NLAST = 0
DO 501 I = 2, NX-1, 2
DO 501 J = 1, NY
II = NODNOR(I,J)
DO 502 J1 = 1, NEY
NELL = ((I/2)-1)*NEY+J1
LEND = NBN(NELL)
DO 502 L = 1, LEND
IF (NOP(NELL,L) .EQ. II) THEN
NLAST = NELL
L1 = L
END IF
502 CONTINUE
NOP(NLAST,L1) = -NOP(NLAST,L1)
NLAST = 0
501 CONTINUE
END IF
C
C Check edge nodes!
C
IF (NTRA .EQ. 1) THEN
NLAST = 0
DO 503 I = 1, NX-2, 2
DO 503 J = 1, NY
II = NODNOR(I,J)
DO 504 J1 = 1, NEY
NELL = ((I-1)/2)*NEY+J1
LEND = NBN(NELL)
DO 504 L = 1, LEND
IF (NOP(NELL,L) .EQ. II) THEN
NLAST = NELL
L1 = L
END IF
504 CONTINUE
NOP(NLAST,L1) = -NOP(NLAST,L1)
NLAST = 0
503 CONTINUE
END IF
C

```

C Check edge nodes of outflow elements!

C

```

      IF (NTRA .EQ. 1) THEN
        NLAST = 0
        DO 505 J = 1, NY
          II = NODNOR(NX, J)
          DO 506 J1 = 1, NEY
            NELL = NE-NEY+J1
            LEND = NBN(NELL)
            DO 506 L = 1, LEND
              IF (NOP(NELL, L) .EQ. II) THEN
                NLAST = NELL
                L1 = L
              END IF
            506 CONTINUE
            NOP(NLAST, L1) = -NOP(NLAST, L1)
            NLAST = 0
          505 CONTINUE
        END IF

```

C

C Check free surface nodes! Use the same procedure as before!

C

```

      IF (NTRA .EQ. 1) THEN
        NLAST = 0
        DO 507 I = 2, NX-1, 2
          II = NH+I
          NELL = ((I/2)-1)*NEY+NEY
          LEND = NBN(NELL)
          DO 508 L = 1, LEND
            IF (NOP(NELL, L) .EQ. II) THEN
              NLAST = NELL
              L1 = L
            END IF
          508 CONTINUE
          NOP(NLAST, L1) = -NOP(NLAST, L1)
          NLAST = 0
        507 CONTINUE
      END IF
      IF (NTRA .EQ. 1) THEN
        NLAST = 0
        DO 509 I = 1, NX-2, 2
          II = NH+I
          NELL = ((I-1)/2)*NEY+NEY
          LEND = NBN(NELL)
          DO 510 L = 1, LEND
            IF (NOP(NELL, L) .EQ. II) THEN
              NLAST = NELL
              L1 = L
            END IF
          510 CONTINUE
          NOP(NLAST, L1) = -NOP(NLAST, L1)
          NLAST = 0

```

```

509  CONTINUE
      END IF
      IF (NTRA .EQ. 1) THEN
        NLAST      = 0
        II         = NHADD
        NELL       = NE
        LEND       = NBN(NELL)
        DO 511 L    = 1, LEND
          IF (NOP(NELL,L) .EQ. II) THEN
            NLAST   = NELL
            L1      = L
          END IF
611  CONTINUE
        NOP(NLAST,L1) = -NOP(NLAST,L1)
        NLAST         = 0
      END IF

C
C  ASSEMBLY
C
      NTRA      = 0
      LCOL      = 0
      KROW      = 0
      DO 16 I = 1, NMAX
        DO 16 J = 1, NMAX
          EQ(J,I) = 0.
16  CONTINUE

C
C  *****  INITIALIZING RHS  *****
C
      II      = NP+2
      DO 17 I = 1, II
        R1(I) = 0.
17  CONTINUE

C
      NELL     = 0
18  NELL      = NELL+1

C
C  WRITE(*,'(A10,I5)') 'NELL= ',NELL
C  IF (NELL .EQ. NE) PRINT*, 'ASSEMBLY HAS FINISHED'
C
      CALL ABFIND

C
      N          = NELL
      KC         = 0
      IF (MWGA .NE. 0) THEN
        NEND     = NBN(N)
        DO 20 I   = 1, NEND
          NK(I)   = NOP(N,I)
20  CONTINUE
      ELSE
        JEND     = NBN(N)
        DO 22 J   = 1, JEND

```

```

NN          = NOP (N, J)
M           = IABS (NN)
K           = NOPP (M)
IDF         = MDF (M)
DO 22 L     = 1, IDF
KC          = KC+1
II          = K+L-1
IF (NN .LT. 0) II = -II
NK(KC)      = II
22 CONTINUE
END IF

C
C
C   SET UP HEADING VECTORS

LEND        = NCN (N)
DO 52 LK    = 1, LEND
NODK        = NK (LK)
IF (LCOL .EQ. 0) GO TO 28
DO 24 L     = 1, LCOL
LL          = L
IF (IABS (NODK) .EQ. IABS (LHED (L))) THEN
LDEST(LK)   = LL
LHED(LL)    = NODK
GO TO 36
END IF
24 CONTINUE
28 LCOL      = LCOL+1
LDEST(LK)   = LCOL
LHED(LCOL)  = NODK
GO TO 36
36 IF (KROW .EQ. 0) GO TO 44
DO 42 K     = 1, KROW
KK          = K
IF (IABS (NODK) .EQ. IABS (KHED (K))) THEN
KDEST(LK)   = KK
KHED(KK)    = NODK
GO TO 52
END IF
42 CONTINUE
44 KROW      = KROW+1
KDEST(LK)   = KROW
KHED(KROW)  = NODK
52 CONTINUE

C
IF (KROW .GT. NMAX .AND. LCOL .GT. NMAX) THEN
NERROR = 2
WRITE (*,417) NERROR
STOP
END IF

C
LEND        = NCN (N)
KEND        = NCN (N)

```

```

DO 56 L = 1, LEND
DO 56 K = 1, KEND
EQ(KDEST(K),LDEST(L)) = EQ(KDEST(K),LDEST(L))+AA(K,L)
56 CONTINUE
C
IF (KROW .LT. NCRIT .AND. NELL .LT. NE) GO TO 18
C
FIND OUT WHICH MATRIX ELEMENTS ARE FULLY SUMMED
C
60 LC      = 0
DO 64 L = 1, LCOL
IF (LHED(L) .LT. 0) THEN
LC      = LC+1
LPIV(LC) = L
END IF
64 CONTINUE
IR      = 0
KR      = 0
DO 68 K = 1, KROW
KT      = KHED(K)
IF (KT .LT. 0) THEN
KR      = KR+1
KPIV(KR) = K
KRO      = IABS(KT)
IF (NCOD(KRO) .EQ. 1) THEN
IR      = IR+1
JMOD(IR) = K
NCOD(KRO) = 2
R1(KRO) = 0.
END IF
END IF
68 CONTINUE
C
MODIFY EQUATIONS WITH APPLIED BOUNDARY CONDITIONS
C
IF (IR .NE. 0) THEN
DO 70 IRR = 1, IR
K      = JMOD(IRR)
DO 69 L = 1, LCOL
IF (IABS(LHED(L)) .EQ. IABS(KHED(K))) THEN
EQ(K,L) = 1.
ELSE
EQ(K,L) = 0.
END IF
69 CONTINUE
70 CONTINUE
END IF
C
IF (KR .LE. 0 .AND. LC .LE. 0) THEN
NERROR = 3
WRITE(*,418) NERROR, NELL
STOP

```



```

      END IF
C
C      SEARCH FOR ABSOLUTE PIVOT
C
      KPIVRO = KPIV(1)
      LPIVCO = LPIV(1)
      PIVOT = EQ(KPIVRO, LPIVCO)
      IF (ABS(PIVOT) .LE. 1.E-4) THEN
        PIVOT = 0.
        DO 76 L = 1, LC
          LPIVC = LPIV(L)
        DO 74 K = 1, KR
          KPIVR = KPIV(K)
          PIVA = EQ(KPIVR, LPIVC)
          IF (ABS(PIVA) .GE. ABS(PIVOT)) THEN
            PIVOT = PIVA
            LPIVCO = LPIVC
            KPIVRO = KPIVR
          END IF
        74 CONTINUE
        76 CONTINUE
      END IF

C
C      NORMALIZE PIVOT ARM
C
      KRO = IABS(KHED(KPIVRO))
      IF (ABS(PIVOT) .LT. 1.E-8) WRITE(*, 476)
      DO 80 L = 1, LCOL
        QQ(L) = EQ(KPIVRO, L) / PIVOT
      80 CONTINUE
      RHS = R1(KRO) / PIVOT
      R1(KRO) = RHS
      PVKOL(KPIVRO) = PIVOT

C
C      ELIMINATE THEN DELETE THE PIVOTAL ROW AND COLUMN
C
      KPIVP = KPIVRO+1
      KPIVM = KPIVRO-1
      LPIVP = LPIVCO+1
      LPIVM = LPIVCO-1

C
      DO 102 K = 1, KPIVM
        PVKOL(K) = EQ(K, LPIVCO)
      102 CONTINUE
      DO 103 K = 1, KPIVM
        R1(IABS(KHED(K))) = R1(IABS(KHED(K))) - PVKOL(K) * RHS
      103 CONTINUE

C
      DO 101 K = KPIVP, KROW
        PVKOL(K) = EQ(K, LPIVCO)
      101 CONTINUE
      DO 191 K = KPIVP, KROW

```

```

R1 ( IABS ( KHED ( K ) ) ) = R1 ( IABS ( KHED ( K ) ) ) - PVKOL ( K ) * RHS
191 CONTINUE
C
DO 994 L          = 1, LPIVM
DO 995 K          = 1, KPIVM
EQ ( K, L )       = EQ ( K, L ) - PVKOL ( K ) * QQ ( L )
995 CONTINUE
994 CONTINUE
DO 976 L          = 1, LPIVM
DO 997 K          = KPIVP, KROW
EQ ( K-1, L )     = EQ ( K, L ) - PVKOL ( K ) * QQ ( L )
997 CONTINUE
976 CONTINUE
C
DO 194 L          = LPIVP, LCOL
DO 195 K          = 1, KPIVM
EQ ( K, L-1 )     = EQ ( K, L ) - PVKOL ( K ) * QQ ( L )
195 CONTINUE
194 CONTINUE
LMAX1             = LCOL
KMAX1             = KROW
DO 192 L          = LPIVP, LMAX1, 2
EQ ( KPIVRO, L )  = EQ ( KPIVP, L+1 ) - PVKOL ( KPIVP ) * QQ ( L+1 )
DO 193 K          = KPIVP, KMAX1
EQ ( K-1, L-1 )   = EQ ( K, L ) - PVKOL ( K ) * QQ ( L )
EQ ( K, L )       = EQ ( K+1, L+1 ) - PVKOL ( K+1 ) * QQ ( L+1 )
193 CONTINUE
192 CONTINUE
C
C WRITE PIVOTAL EQUATION ON DISC
C
IF ( ICE+2*LCOL+3 .GT. NCRA Y .AND. ICE5 .EQ. 0 ) THEN
ICE5             = 1
GO TO 771
END IF
C
IF ( ICE .LT. NCRA Y .AND. ICE5 .EQ. 0 ) THEN
ICE2             = ICE
DO 701 IG        = 1, LCOL
CRAY ( ICE+IG )  = LHED ( IG )
701 CONTINUE
ICE              = ICE+LCOL
DO 702 IG        = 1, LCOL
CRAY ( ICE+IG )  = QQ ( IG )
702 CONTINUE
ICE              = ICE+LCOL
CRAY ( ICE+1 )   = KRO
CRAY ( ICE+2 )   = LPIVCO
CRAY ( ICE+3 )   = LCOL
ICE              = ICE+3
ELSE
IF ( ICE .GT. NCRA Y ) THEN

```

```

      ICE                = ICE2
      ICE5               = 1
      GO TO 771
      END IF
      END IF
C
771  IF (ICE .GE. NCRA Y .OR. ICE5 .EQ. 1) THEN
      ICE1               = ICE1+1
      WRITE (ND1) KRO, LCOL, LPIVCO, (LHED(L), QQ(L), L=1, LCOL)
      END IF
C
      DO 129 K           = 1, KROW
      EQ(K, LCOL)       = 0.
129  CONTINUE
      DO 130 L           = 1, LCOL
      EQ(KROW, L)       = 0.
130  CONTINUE
C
C      REARRANGE THE HEADING VECTORS
C
      LCOL               = LCOL-1
      IF (LPIVCO .NE. LCOL+1) THEN
      DO 132 L           = LPIVCO, LCOL
      LHED(L)           = LHED(L+1)
132  CONTINUE
      END IF
      KROW               = KROW-1
      IF (KPIVRO .NE. KROW+1) THEN
      DO 140 K           = KPIVRO, KROW
      KHED(K)           = KHED(K+1)
140  CONTINUE
      END IF
C
C      DETERMINE WHETHER TO ASSEMBLE, ELIMINATE OR BACKSUBSTITUTE
C
      IF (KROW .GT. NCRIT) GO TO 60
      IF (NELL .LT. NE)   GO TO 18
      IF (KROW .GT. 1)    GO TO 60
      KPIVRO              = 1
      PIVOT               = EQ(1, 1)
      KRO                 = IABS(KHED(1))
      LPIVCO              = 1
      QQ(1)               = 1.
      R1(KRO)             = R1(KRO)/PIVOT
C
      IF (ICE .GE. NCRA Y .OR. ICE5 .EQ. 1) THEN
      ICE1               = ICE1+1
      WRITE (ND1) KRO, LCOL, LPIVCO, LHED(1), QQ(1)
      ELSE
      CRAY(ICE+1)         = LHED(1)
      CRAY(ICE+2)         = QQ(1)
      CRAY(ICE+3)         = KRO

```

```

      CRAY(ICE+4)      = LPIVCO
      CRAY(ICE+5)      = LCOL
      ICE              = ICE+5
      END IF

C
      CALL BACSUB(ICE,ICE1)
C
416 FORMAT(/ ' NERROR = ' , I5 // I5,
      1' TH. ELEMENT HAS MORE THAN ONE NODE WITH THE',
      2' SAME NODAL NUMBER'
      3/)
417 FORMAT(/ ' NERROR = ' , I5 //
      1' THE DIFFERENCE NMAX-NCRIT IS NOT SUFFICIENTLY LARGE',
      2' TO PERMIT ASSEMBLY OF THE NEXT ELEMENT---',
      3' EITHER INCREASE NMAX OR LOWER NCRIT'
      4/)
418 FORMAT(' NERROR = ' , I5, ' NELL = ' , I5 //
      1' THERE ARE NO MORE ROWS FULLY SUMMED, THIS WAY BE DUE TO--
- '
      2/ ' (1) INCORRECT CODING OF NOP OR NK ARRAYS'
      3/ ' (2) INCORRECT VALUE OF NCRIT. INCREASE NCRIT TO PERMIT'
      4/ ' WHOLE FRONT TO BE ASSEMBLED'
      5/)
476 FORMAT(' WARNING-MATRIX SINGULAR OR ILL CONDITIONED')
C
      RETURN
      END
C
C*****
*****
C
      SUBROUTINE BACSUB(ICE,ICE1)
C
C      BACK-SUBSTITUTION FOR FULL PIVOTING
C      BACK SUBSTITUTION
C
      PARAMETER (NXNP=313000,NL=31000,ND=145000,NCRIT=115,
      !      NMAX=NCRIT+25)
      PARAMETER (NCRAY=27000000)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      DIMENSION QQ(NMAX), LHED(NMAX)
C
      COMMON /FRON1/
NP,NH,NHADD,NE,NBN(NL),NCN(NL),ND1,NWGA,NELL,NTRA
      COMMON /FRON2/ NOP(NL,12),NOPP(ND),MDF(ND),NCOD(NXNP)
      COMMON /FRON3/ R1(NXNP),SK(NXNP),AA(25,25)
      COMMON /FRON4/ CRAY(NCRAI)
      COMMON /MESH/   NEX1,NEX,NEY,NX,NY,NX1,NXP
C
      ICE1          = ICE1+1

```

```

C      DO 4 I      = 1, NP
      SK(I)      = 0.
4 CONTINUE
C
C      DO 32 IV    = 1, NP
C
      ICE1      = ICE1-1
      IF (ICE1 .GE. 1) THEN
      BACKSPACE ND1
      READ(ND1) KRO, LCOL, LPIVCO, (LHED(L), QQ(L), L=1, LCOL)
      BACKSPACE ND1
      ELSE
      LCOL      = CRAY(ICE)
      LPIVCO    = CRAY(ICE-1)
      KRO      = CRAY(ICE-2)
      ICE      = ICE-3
      DO 701 I1  = ICE, ICE-(LCOL-1), -1
      IG      = LCOL-(ICE-I1)
      QQ(IG)   = CRAY(I1)
701 CONTINUE
      ICE      = ICE-LCOL
      DO 702 I1  = ICE, ICE-(LCOL-1), -1
      IG      = LCOL-(ICE-I1)
      LHED(IG) = CRAY(I1)
702 CONTINUE
      ICE      = ICE-LCOL
      END IF
C
      LCO      = IABS(LHED(LPIVCO))
C
      IF (NCOD(LCO) .LE. 0) THEN
      GASH      = 0.
      QQ(LPIVCO) = 0.
      DO 16 L    = 1, LCOL
      GASH      = GASH-QQ(L)*SK(IABS(LHED(L)))
16 CONTINUE
      SK(LCO)   = R1(KRO)+GASH
      ELSE
      NCOD(LCO) = 1
      END IF
C
32 CONTINUE
C
      RETURN
      END

```



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

```

% Makes a contour plot of u velocity (index=1),
% v-velocity (2), temperature (3) or pressure(4)
[int,x,y,u,v,p,s]=textread('A_0.0006','%f %f %f %f %f %f
%f',ntot,'headerlines',1);
ni=ntot/nj
if index<=2
    for i=1:ni
        for j=1:nj
            x1(i,j)=x(j+nj*(i-1));
            y1(i,j)=y(j+nj*(i-1));
            u1(i,j)=u(j+nj*(i-1));
            v1(i,j)=v(j+nj*(i-1));
        end
    end
elseif index>2
    for i=1:2:ni
        k=(i+1)/2;
        for j=1:2:nj
            l=(j+1)/2;
            x1(k,l)=x(j+nj*(i-1));
            y1(k,l)=y(j+nj*(i-1));
            p1(k,l)=p(j+nj*(i-1));
            s1(k,l)=s(j+nj*(i-1));
        end
    end
end
if index==1
    contourf(x1,y1,u1,100)
elseif index==2
    contourf(x1,y1,v1,20)
elseif index==3
    contour(x1,y1,p1,150)
elseif index==4
    contourf(x1,y1,s1,10)
end

```



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074654

